MOMENTOS MÁXIMOS DE FLEXION QUE PRODUCE

EL PASO DE UN TREN SOBRE UN PUENTE

POR A. OBRECHT

Un estudio publicado últimamente por los señores Trucco i Mardones (1) me ha sujerido la idea de dar a conocer una solucion sencilla i enteramente gráfica de varios problemas relacionados con la determinacion de los momentos máximos de flexion en una viga sobre dos apoyos.

No tengo la seguridad de que esta solucion sea nueva, pero no la he encontrado en ninguna de las obras de mecánica aplicada que he tenido a la vista i, por lo tanto, he pensado que habria talvez algun interes en publicarla en nuestros ANALES.

Ademas, i para que la lectura de este artículo sea mas fácil, he recordado los teoremas de mecánica que sirven de base a toda la teoría.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES

Se demuestra en la Mecánica Racional, que las fuerzas elásticas que atraviezan una seccion cualquiera de un cuerpo en reposo i representan la accion de una de las partes A sobre la otra B, forman un sistema equivalente al de las fuerzas exteriores que obran sobre A; en efecto, los dos sistemas de fuerzas equilibran las que obran sobre B.

Este teorema permite calcular de antemano las dimensiones de las diversas secciones de un cuerpo para que éste pueda *resistir* a un sistema dado de fuerzas exteriores.

En el caso de una viga horizontal sobre dos apoyos simples, las fuerzas exteriores comprenden los que obran directamente sobre la viga i las reacciones de los dos apoyos; todas ellas son verticales i repartidas simétricamente, respecto de un mismo plano vertical que contiene los centros de gravedad de todas las secciones trasversales.

En una cualquiera de estas secciones, las fuerzas elásticas que representan la accion de la parte izquierda de la viga sobre la derecha, son equivalentes, en el centro de gravedad de la seccion, a una resultante jeométrica T i a un par de momento M.

---

(1) ANALES DEL INSTITUTO DE INJENIEROS, 15 de Marzo de 1905.

Segun el teorema enunciado mas arriba, el sistema T, M es equivalente tambien al sistema de las fuerzas exteriores que obran a la izquierda de la seccion; pero todas ellas son verticales, luego T es una fuerza vertical igual a la suma aljebraica de las fuerzas situadas a la izquierda de la seccion i el eje del par es perpendicular al plano de simetría de las fuerzas; su momento M es igual a la suma de los momentos de las mismas fuerzas respecto del centro de gravedad de la seccion: T es el *esfuerzo cortante* i M el *momento de flexion*.

REPRESENTACION GRÁFICA DEL MOMENTO DE FLEXION

Para calcular la suma de los momentos de las fuerzas exteriores que obran a la izquierda de una seccion se puede, en primer lugar, reemplazar estas fuerzas por otras equivalentes situadas en el plano de simetría; sean en este plano (fig. 1) A i B los puntos de apoyo de la viga; 1, 2, 3, 4 las fuerzas que obran directamente sobre ella, R i R' las reacciones de los apoyos; $a\ b\ c\ d$ el polígono de las fuerzas i $C\ E\ F\ G\ H\ D$ un polígono funicular cualquiera, de polo O. La paralela Oh a la cuerda CD del polígono funicular define entónces las dos reacciones R i R'.

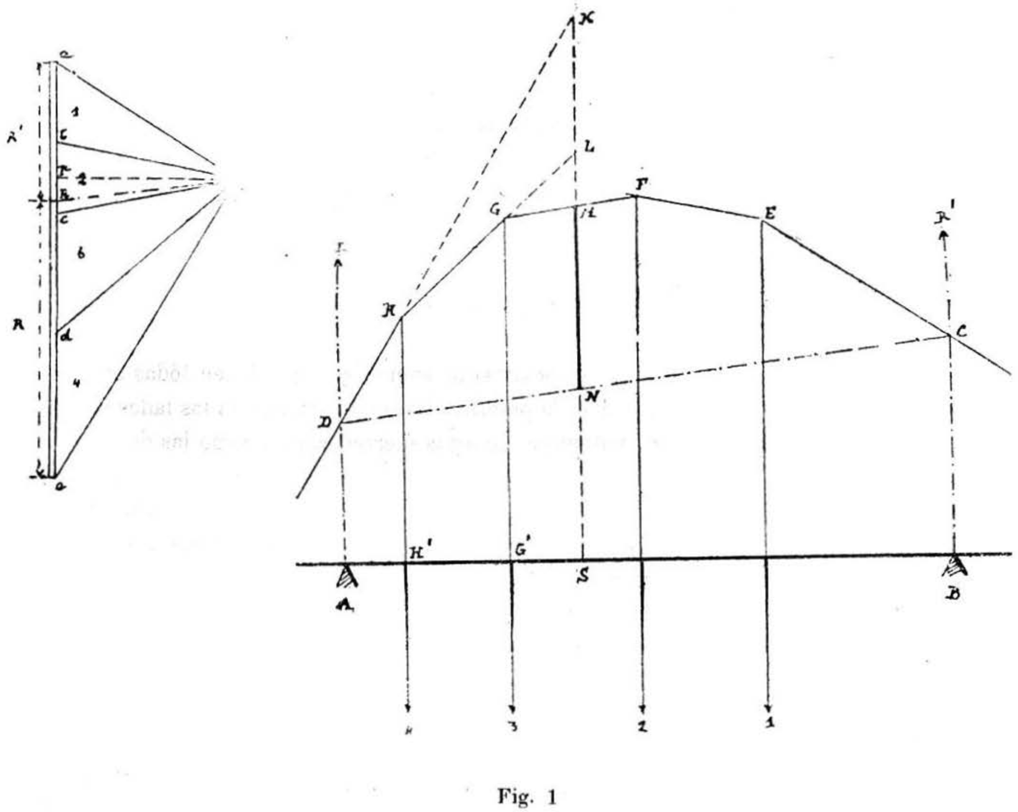

Fig. 1

Sea S el centro de gravedad de una seccion; si se cuentan los momentos positivamente de izquierda a derecha, se tiene, en el punto considerado,

$$M = R.\,AS - (4).\,H'S - (3).\,G'S$$

Comparemos ahora los triángulos semejantes DKN, $O\,h\,e$ i sea p la distancia polar, tendremos

$$\frac{AS}{p} = \frac{KN}{h\,e}$$

Luego, si se observa que $h\,e$ es igual a R,

$$R.\,AS = p.\,KN$$

Se obtiene, de la misma manera,

$$(4).\,H'S = p.\,KL$$

$$(3).\,G'S = p.\,LM$$

Por consiguiente

$$M = p.\,(KN - KL - LM) = p.\,MN$$

Segun esto, *el momento de flexion, en una seccion S, es el producto de la distancia polar de un polígono funicular cualquiera de las fuerzas por el segmento interceptado, sobre el vertical de S, por el polígono funicular i su cuerda.*

CONSECUENCIA

Cuando las fuerzas que obran directamente sobre la viga tienen todas un mismo sentido, como sucede precisamente en la práctica, las inclinaciones de los lados consecutivos de un polígono funicular cualquiera de estas fuerzas varian como las de los radios polares, es decir, en un mismo sentido, desde el primero hasta el último, por consiguiente, habrá, en jeneral, una posicion de la seccion S i *una sola* que corresponderá a un máximo del momento de flexion; esta posicion coincide evidentemente con la línea de accion de una de las fuerzas, i ésta se encuentra comprendida entre los dos lados del polígono funicular, cuyas inclinaciones relativas, respecto de la cuerda, son de signos contrarios.

Para determinar esta línea de accion basta observar que, en el polígono de las fuerzas, los dos lados del polígono funicular definidos mas arriba son paralelos a los radios polares, entre los cuales está comprendida la paralela a la cuerda; por ejemplo, en la figura 1, el punto h de la recta O h, paralela a la cuerda, cae sobre la fuerza 2, luego la línea de acción de la fuerza 2 es la que corresponde al máximo del momento de flexion

Si un lado del polígono funicular es paralelo a la cuerda, el momento de flexion queda constante en todas las secciones comprendidas entre las dos fuerzas que limitan el lado considerado, i es mayor que el momento de flexion en otra seccion cualquiera.

VARIACION DEL MOMENTO DE FLEXION EN UNA SECCION CUANDO EL CONJUNTO DE LAS FUERZAS SE TRASLADA PARALELAMENTE A SÍ MISMO

Supongamos que, en la figura 1, las cuatro fuerzas 1, 2, 3 i 4, tengan una misma traslacion horizontal de izquierda a derecha. Para determinar la variacion correspondiente del momento de flexion, en la seccion S, se puede suponer que el sistema de las fuerzas queda fijo i que los dos puntos de apoyo A i B, junto con la seccion S, se trasladan de la misma cantidad de derecha a izquierda.

En esta hipótesis, el polígono funicular queda fijo i el estremo M del segmento MN describe sucesivamente los lados de este polígono; demostraremos que el otro extremo N. describe tambien un polígono.

Sean, en efecto, (fig. 2) A, S, B i A', S', B' dos posiciones consecutivas de los puntos de apoyo i de la seccion: $C\,D$ i $C'\,D'$ las cuerdas correspondientes del polígono funicular; $M\,N$ i $M'\,N'$ los segmentos que definen los momentos de flexion en S i S'. Tracemos, por D' i C', dos rectas paralelas a $C\,D$ hasta su interseccion en H i G con la vertical

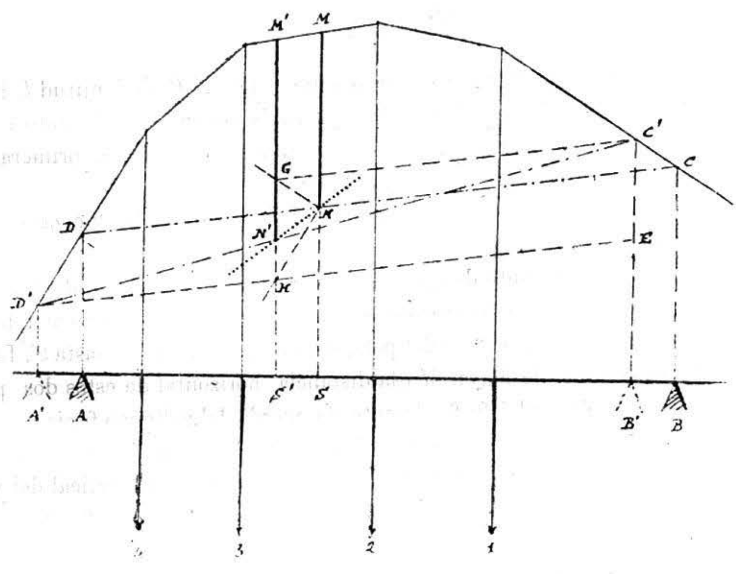

Fig. 2

de S' i prolongamos $D'\,H$ hasta su interseccion E con $C'\,B'$. Las dos rectas $N\,G$, $N\,H$ son respectivamente paralelas a CC' i DD' i, cuando los puntos C' i D' recorren los lados extremos del polígono funicular, los puntos G i H describen las rectas $N\,G$ i $N\,H$.

Sea x la distancia constante de la seccion S al punto de apoyo A i l la distancia AB; se tiene evidentemente.

$$\frac{N'H}{C'E} = \frac{x}{l}$$

O bien, si se observa que $C'E$ es igual a GH,

$$\frac{N'H}{G'H} = \frac{x}{l}$$

Segun esto, a medida que los puntos G i H describen las dos rectas NG i NH, el punto N' divide el segmento vertical GH en una razon constante; el lugar jeométrico de este punto es, por consiguiente, una recta.

La inclinacion de esta recta depende de las inclinaciones de los lados del polígono funicular que se encuentran a plomo de los puntos de apoyo, i cambia cuando uno u otro de los apoyos encuentra la línea de accion de una fuerza. En resúmen, el lugar jeométrico de los puntos N es un polígono; lo llamaremos, para abreviar, el *polígono de flexion de la seccion S.*

FORMA DEL POLÍGONO DE FLEXION

Sea (fig. 3) un sistema de cuatro fuerzas i una viga AB de lonjitud l. Para dibujar el polígono de flexion de una seccion S, situada a la distancia x del punto de apoyo A, se consideran las diversas fases que pueden presentarse desde que la primera fuerza 1 entra en la viga hasta que la fuerza 4 salga de ella.

Supondremos, como mas arriba, que las líneas de accion de las fuerzas quedan fijas i que la viga, junto con la seccion, se trasladan de derecha a izquierda.

En la primera fase, el punto de apoyo A pasa de la línea de accion de 1 a la línea de accion 2 i la vertical, de este punto recorre el lado 1 - 2 del polígono funicular, la del punto de apoyo B recorre el primer lado del polígono funicular desde 1' hasta 2'. La vertical de la seccion pasa tambien de M_0 en M i la distancia horizontal de estos dos puntos es igual a la distancia horizontal 1-2; finalmente, la cuerda del polígono funicular coincide, primero con el primer lado de este polígono i toma despues la posicion 2—2'.

El punto N del polígono de flexion estará sobre la cuerda i la vertical del punto M; sin embargo, se puede obtener directamente su posicion sobre la cuerda 2—2' si se observa que este punto divide la cuerda en la razon de x a l.

Una vez obtenido el punto N, la recta $M_0 N$ será el primer lado del polígono de flexion.

Tracemos, por el polo O, una paralela On a $M_0 N$; los radios polares paralelos a los lados recorridos por los extremos de la cuerda son respectivamente paralelos a Oa i Ob, luego el punto n divide el segmento ab en la razon de x a l.

En la segunda frase, el punto de apoyo A recorre el intervalo 2—3 i las dos fuerzas

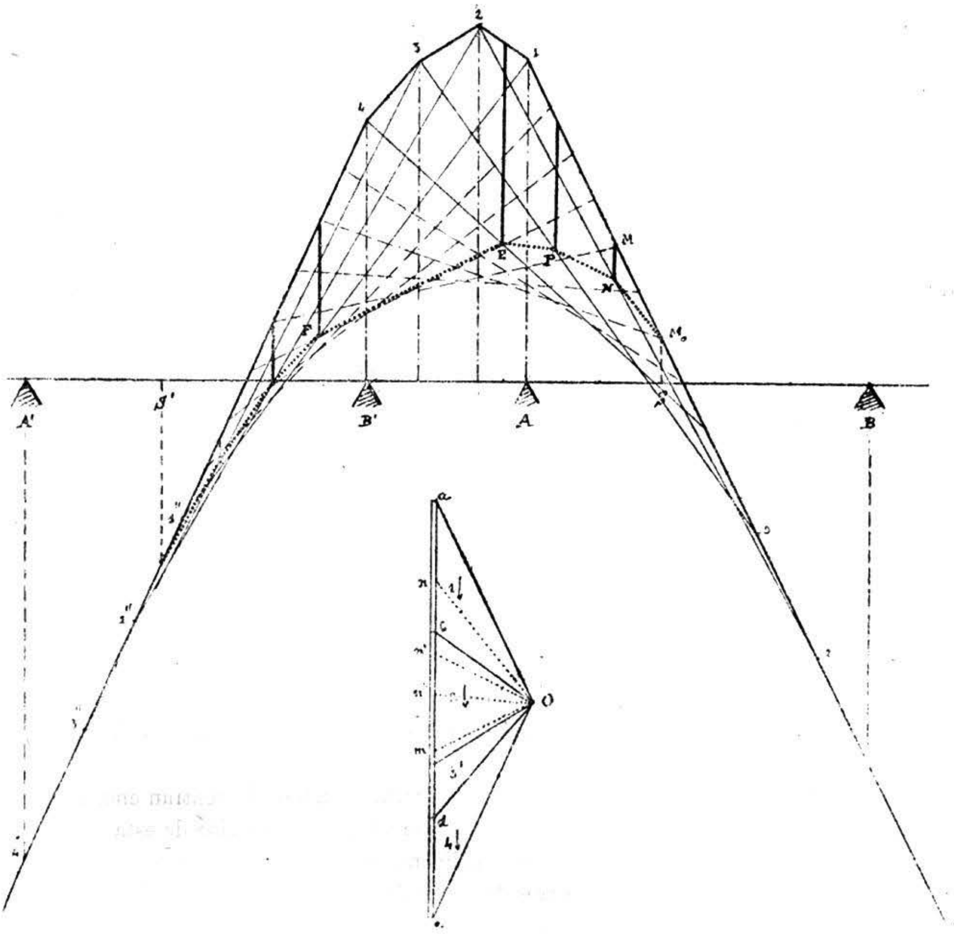

Fig. 3

1 i 2 obran sobre la viga; la cuerda pasa de la posicion 2—2' a la posicion 3—3' i el punto N viene en P. El punto P divide la cuerda 3—3' en la razon de x a l. Ademas, la paralela $O\ n'$ a $N\ P$ divide el segmento $a\ c$ en la misma razon.

Se obtienen de la misma manera los lados siguientes del polígono de flexion i se observa que las inclinaciones sucesivas de estos lados varían en un mismo sentido, desde el primero hasta el último, como en el polígono funicular.

Segun esto, los dos polígonos, son convexos i tienen su convexidad a un mismo lado de la viga; ademas el polígono de flexion está comprendido entre el polígono funicular i la viga. Los vértices del primer polígono coinciden con las líneas de accion de las fuerzas i los del polígono de flexion corresponden a los pasos de uno u otro punto de apoyo por estas mismas líneas de accion.

MOMENTO MÁXIMO DE FLEXION EN UNA SECCION DADA

Como el momento de flexion en una seccion de la viga es proporcional al segmento interceptado sobre una vertical por los dos polígonos funicular i de flexion, es evidente que su máximo no puede tener lugar sino cuando uno u otro estremo del segmento pasa por un vértice de uno de los polígonos; pero si se toma en cuenta la forma del polígono de flexion, se averigua que solo habrá máximo cuando el estremo superior del segmento encuentre un vértice del polígono funicular.

Por consiguiente, *los máximos de flexion, en una seccion cualquiera, se producen necesariamente cuando una de las fuerzas está a plomo de la seccion.*

Veamos ahora cómo se puede determinar la fuerza que corresponde a un máximo del momento de flexion.

Consideremos, en la figura 3, la fase durante la cual las cuatro fuerzas se encuentran encima de la viga. A esta fase corresponde el lado $E\,F$ del polígono de flexion i una parte determinada del polígono funicular.

Para que haya un máximo del momento de flexion en la fase considerada es necesario evidentemente que las inclinaciones relativas, respecto de $E\,F$, de dos lados consecutivos de la parte del polígono funicular que se encuentra encima de $E\,F$ sean de signos distintos.

Tracemos entónces Om paralelo a $E\,F$; el punto m cae sobre la fuerza 2, luego la inclinacionde $E\,F$ es intermedia entre las de los lados (1—2) i (2-3) del polígono funicular i habrá máximo del momento de flexion cuando la línea de accion de la fuerza 2 se encontrara a plomo de la seccion.

En la fase correspondiente al lado $P\,E$ las fuerzas 1, 2, 3 se encuentran encima de la viga i la paralela $O\,n''$ a $P\,E$ corta la fuerza 2, pero la línea de accion de esta fuerza no corta $P\,E$, luego los lados de la parte del polígono funicular que se encuentran encima de $P\,E$ no tienen inclinaciones relativas de signos distintos respecto de $P\,E$ i no hai máximo de flexion en la fase considerada.

En las demas fases del ejemplo elejido, ninguna línea de accion corta los lados del polígono de flexion i, por consiguiente, no hai máximo del momento de flexion en ninguna de ellas.

Si uno de los lados del polígono funicular que se encuentran encima de $E\,F$ estuviera paralelo a $E\,F$, el lado $(2-3)$ por ejemplo, el momento de flexion quedaria constante en todas las posiciones de la seccion S comprendidas entre los verticales de 2 i 3 i seria mayor que los demas, pero si una de las verticales 2 o 3 no cortara $E\,F$ el momento de flexion correspondiente no seria máximo.

En el caso jeneral de un sistema cualquiera de fuerzas, podrán haber varios máximos de flexion, en una misma seccion de la viga, pero en cada fase, es decir, para cada grupo de fuerzas que se encuentra encima de la viga, corresponderá jeneralmente un solo máximo o ninguno. Por escepcion podrá haber en una misma fase una infinidad de máximos iguales entre sí cuando dos lados de los dos polígonos son paralelos.

Este resultado concuerda con la fórmula usual; en efecto, sean P una de las fuerzas,

i su número de órden, n el número de las fuerzas que se encuentran encima de la viga; los segmentos $e\ m$, $e\ c$ i $e\ b$ de la figura 3 tienen, en el caso jeneral, los valores siguientes:

$$e\ m = \frac{x}{l} \Sigma P$$

$$e\ b = \sum_{i}^{n} P$$

$$e\ c = \sum_{i+1}^{n} P$$

i la condicion para que haya máximo en la fase considerada es:

$$\sum_{i+1}^{n} P < \frac{x}{l} \Sigma P < \sum_{i}^{n} P$$

Sin embargo, las esplicaciones que se han dado mas arriba muestran que la condicion así obtenida es necesaria, pero no suficiente; es preciso todavia que la línea de accion de la fuerza de rango i encuentre el lado correspondiente del polígono de flexion.

MOMENTO DE FLEXION MÁXIMO MAXIMORUM

Cuando se han trazado las cuerdas del polígono funicular que separan las diversas fases, se distingue inmediatamente en que fase se producirá el máximo maximorum. Por ejemplo, en la figura 3, este máximo tiene lugar cuando el conjunto de las cuatro fuerzas se encuentra encima de la viga.

Para determinarlo con cierta exactitud se intercalan entre las dos cuerdas que limitan la fase un número suficientemente grande de cuerdas intermedias.

En la figura 3 las cuerdas que limitan la fase considerada son 4—4' i 1—1''; se dividen entónces los segmentos 1—4' i 4—1'' en el mismo número de partes iguales i se unen los puntos de division consecutivas.

Las cuerdas así intercaladas envuelven una parábola de eje vertical, pero es inútil dibujar esta curva i es preferible intercalar el mayor número posible de cuerdas. El gráfico permite entónces determinar, a la vez, el valor máximo maximorum del momento de flexion, la seccion correspondiente de la viga i la posicion de sus puntos de apoyo respecto del sistema de las fuerzas.

En la práctica es conveniente dibujar un polígono funicular que tenga una distancia polar pequeña para que las variaciones del segmento que define el momento de flexion sean mas grandes.