

Consideremos a esta viga cargada con una sola fuerza P , i apoyada en sus extremos A i B .

Las reacciones t i T tomando las notaciones de la figura serian

$$t = \frac{Pl}{\lambda} = P(1 - \delta) \quad \text{i} \quad T = \frac{Pl}{\lambda} = P\delta.$$

Consideremos la expresion del momento μ en una seccion situada a una distancia $\theta\lambda$ del origen A , que es: $\mu = t\theta\lambda = P\lambda\theta(1 - \delta)$

La expresion del momento para una seccion cualquiera a la derecha de P , es $\mu = T\lambda(1 - \theta) = P\lambda\delta(1 - \theta)$.

Para encontrar las ecuaciones que representan la curva de la fibra neutra deformada, podemos poner que el radio de curvatura f es sensiblemente

$$= \left(\frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \right) \text{ i reemplazar } \mu \text{ por } \frac{EI}{f} = EI \times \frac{d^2 y}{dx^2} \text{ i se tiene}$$

$$EI \times \frac{d^2 y}{dx^2} = P\lambda\theta(1 - \delta)$$

$$EI \times \frac{d^2 y}{dx^2} = P\lambda\delta(1 - \theta)$$

segun se considere la parte de curva a la izquierda o derecha de P . Integrando, de tal manera que las tangentes a plomo P , en que se unen las dos ramas de la curva sean iguales i de tal manera que las ordenadas en los puntos de apoyo sean cero, se encuentra:

$$\text{a Izquierda de } P. \quad EI y = \frac{P\lambda^3}{6} \theta(1 - \delta) \times [\theta^2 + \delta(\delta - 2)]$$

$$\text{a Derecha de } P. \quad EI y = \frac{P\lambda^3}{6} \delta(1 - \theta) \times [\delta^2 + \theta(\theta - 2)]$$

(Véase Mécanique appliquée por Planat, pág. 167-170-301-303). Con las fórmulas anteriores podemos calcular la flecha que tomara la fibra neutra deformada, en el pendolon C i en D .

Consideremos siempre la viga apoyada en A i B , i procuremos encontrar dos fuerzas R_1 i R_2 capaces de anular las flechas en C i D , producidas por la fuerza P . Para conseguirlo demos un valor cualquiera a la reaccion R_1 que obra en el pendolon de la viga; calculamos aplicando las fórmulas anteriores la flecha f_1 en C i F_1 en D .

Admitiendo ahora que obrase solo en el apoyo D una fuerza $R_2 = R_1$ que ya calculamos, obtendríamos en C por ejemplo una ordenada f_2 i en D una F_2 . (Valores recíprocos a los anteriores).

Si el punto R_1 queda encima ó debajo de la recta A. B. de una cantidad a_1 será necesario tambien que la suma aljebraica que corresponden a R_1 sea igual a $\pm a_1$.

El valor de R_1 adoptado arbitrariamente no representa la reaccion verdadera, sino que ella será $K_1 R_1$ coeficiente que vamos a determinar.

Sabemos que las ordenadas de las flechas, son proporcionales a las fuerzas que las producen, tendríamos entonces las dos condiciones por satisfacer:

$$\begin{aligned} K_1 f_1 + K_1 F_1 &= \pm a_1 && \text{para el pendolon } R_1 \\ K_2 f_2 + K_2 F_2 &= \pm a_2 && \text{para el pendolon } R_2 \end{aligned}$$

En este sistema de ecuaciones los valores f — F i a son cantidades conocidas; resuelto el sistema tendríamos los valores correspondientes de R_1 i R_2 que obrando simultáneamente anularian la flecha en C i D. producida por la fuerza P.

Quedaría por calcular las reacciones t i T , i ello es sumamente fácil, tomando una ecuación de traslacion vertical i sabiendo que $t + T$ debe ser igual a la suma aljebraica de todos los pesos i reacciones que obran sobre la viga.

Siguiendo el desarrollo teórico para encontrar el valor mas directamente de las reacciones t — R_1 — R_2 — T en los distintos casos, valiéndose de las ecuaciones de la curva elástica, i haciendo cero la flecha sucesivamente en el apoyo C i despues en el D. se encontrará que:

$$\begin{aligned} t &= -\left(\frac{\delta}{15} - \frac{\delta^3}{15}\right) && R_1 = \frac{6\delta - 6\delta^3}{15} \\ R_2 &= -\frac{24\delta + 9\delta^3}{15} && T = -1 + \frac{19\delta - 4\delta^2}{15} \end{aligned}$$

Para el tramo del medio: fuerza P. en este tramo

$$\begin{aligned} t &= \frac{7\delta - 12\delta^2 + 5\delta^3}{15} && R_1 = -\frac{12\delta - 18\delta^2}{15} + \delta^3 \\ R_2 &= -1 + \frac{3\delta + 27\delta^2}{15} \delta^3 && T = \frac{2\delta + 3\delta^2 + 5\delta^3}{15} \end{aligned}$$

Para el tramo de la izquierda: fuerza P en este tramo.

$$\begin{aligned} t &= \frac{7\delta - 12\delta^2 + 4\delta^3}{15} && R_1 = -1 - \frac{3\delta + 27\delta^2 - 9\delta^3}{15} \\ R_2 &= \frac{12\delta - 18\delta^2 + 6\delta^3}{15} && T = -\frac{2\delta + 3\delta^2 - \delta^3}{15} \end{aligned}$$

Tal es la série de fórmulas que dan el valor de las reacciones cuando una carga aislada obra sobre la viga.

Para hacer bien espedito encontrar los valores de las reacciones, con una exacti-

tud suficiente, el que suscribe ha calculado estos, de dos en dos centésimos de cada tramo. Estas i otras tablas mui interesantes serán materia de alguna publicacion posterior; i para completar esta idea, el infrascrito ha encontrado entusiasta cooperacion en su compañero de oficina, ingeniero señor Eujenio Barros P.

Los valores de las reacciones debidas al peso muerto del tramo son bien conocidos $t=T=0,4$ pl $R_1 = R_2 = 1,1$ pl.

Para ver mas claro, la ventaja de emplear tablas, quiero traer como ejemplo el cálculo hecho para el puente Teno en Curicó.

El tipo de viga es del sistema Finck ya descrito, la luz igual 16 m dividida en $\frac{1}{3}$ de 5.33 cada claro.

Hecho el avalúo del peso muerto con la debida prolijidad se llega a 525 kilos por metro lineal; lo que da un peso por tramo de 5,33 m de 2798 Kg.

$$\begin{aligned} \text{Tenemos:} \quad & \text{Reaccion } t=T=0,4 \times 2\,798=1\,119 \text{ Kg} \\ & \text{Reaccion } R_1 = R_2 = 1,1 \times 2\,798=3\,078 \text{ Kg} \\ & \text{Momento apoyo } C=1\,119 \times 5,33-2\,798 \times 2,67=1\,507 \text{ Kgm} \\ & \text{Momento } \frac{1}{2} \text{ tramo } AC=1\,119 \times 2,67-\frac{2\,798}{2} \times 1,33=1\,127 \text{ Kgm} \\ & \text{Momento } \frac{1}{2} \text{ tramo } CD=1\,119 \times 8+3\,078 \times 2,67-5,25 \times 8 \times 4=370 \text{ Kgm} \end{aligned}$$

1) *Caso.*—Considerando ahora una carreta de 6 toneladas de peso, colocada en $\frac{1}{2}$ tramo AC, pesará por rueda 3 toneladas.

Con la ayuda de las tablas se obtiene ahora con suma facilidad el valor de las reacciones.

$$\begin{aligned} t=0,4 \times 3\,000=1\,200 \text{ Kg} \quad & R_2=0\,150 \times 3\,000=450 \\ R_1=0\,725 \times 3\,000=2\,165 \text{ Kg} \quad & T=0\,025 \times 3\,000=75 \\ \text{El momento en medio tramo } AC=1\,200 \times 2,67=1\,614 \text{ Kgm.} \\ \text{El momento en el apoyo } C=1\,200 \times 5,33-3\,000 \times 2,67=1\,614 \text{ Kgm.} \end{aligned}$$

2) *Caso.*—Consideremos ahora una carreta de 6 toneladas colocada al $\frac{1}{2}$ tramo CD.

$$\begin{aligned} \text{Se tiene:} \quad & \text{Reaccion } t=T=0\,075 \times 3\,000=225 \text{ Kg} \\ & \text{Reaccion } R_1 = R_2 = 0,575 \times 3\,000=1\,725 \text{ Kg} \\ \text{El momento en el apoyo } C=225 \times 5,33=1\,199 \text{ Kgm.} \\ \text{El momento en el } \frac{1}{2} \text{ tramo } CD=225 \times 8+1\,725 \times 2,67=2\,806. \end{aligned}$$

Para el cálculo de los esfuerzos que sufren los tirantes de la viga, se ha hecho el gráfico de Cremona i se obtuvo:

Cuando la rueda está en $\frac{1}{2}$ tramo AC:

Estension debido al peso muerto $p = 8\ 600$
 Estension debido al peso carreta $p = 6\ 300$

Estension total $= 14\ 900$

Compresion debido al peso $p = 8\ 000$
 Compresion debido a $p = 5\ 900$

Compresion total $= 13\ 900$

Se vé que en este caso el tirante debe resistir a una estension de 14 900 kilos i la viga una compresion de 13 900.

2) Rueda de la carreta sobre el pendolon en C. Se tiene:

Estension de $p = 8\ 600$	Compresion $p = 8\ 000$
Id. » $P = 8\ 800$	Id. $P = 8\ 200$

Sumas: Estension $= 17\ 400$	Compresion $= 16\ 200$
------------------------------	------------------------

En este caso el tirante debe resistir a 17 400 kilos i la viga sufrir una compresion de 16 200 kilos.

3) Rueda de la carreta en el medio tramo CD:

Estension de $p = 8\ 600$	Compresion $p = 8\ 000$
Id. » $P = 5\ 000$	Id. $P = 4\ 700$

Sumas: Estension $= 13\ 600$	Compresion $= 12\ 700$
------------------------------	------------------------

Resta por resumir los resultados anteriores obtenidos para verificar las dimensiones de la viga.

1) Carreta de 6 toneladas en el $\frac{1}{2}$ tramo AC:

Momento debido al peso muerto $= 1\ 127\ \text{Kg.}$	
Momento debido a la carreta $= 3\ 204\ \text{Kg.}$	
Suma $= 4\ 331\ \text{Kg.}$	

El perfil de la viga es dobleté laminado, tipo normal aleman, cuyo $\frac{I}{V} = 652\ \text{cm}^3$
 peso m lineal $= 53.8$ i su seccion $= 69\ \text{cm}^2$

Resulta una tasa a la flexion de	$= 4\ 331:652 = 6.6\ \text{Kg mm}^2$
i una compresion de	$= 13\ 900:69 = 2.0\ \text{»\ »}$

Se tiene $\sigma = 8.6\ \text{Kg mm}^2$

2) Carreta en el apoyo C.

$$\begin{aligned} \text{Momento debido al peso } p &= 1\,507 \text{ Kgm} \\ \text{Momento debido a la carreta } P &= 0 \text{ »} \end{aligned}$$

$$\text{Suma} = 1\,507 \text{ Kg.}$$

$$\begin{aligned} \text{Resulta una tasa a la flexion de} &= 1\,507:652=2.31 \text{ Kg mm}^2 \\ \text{i una compresion de} &= 16\,200:69=2.34 \text{ » } \end{aligned}$$

$$\text{Se tiene } \alpha = 4.65 \text{ Kg mm}^2$$

3) Carreta en el medio tramo CD:

$$\begin{aligned} \text{Momento debido al peso } p &= 370 \text{ Kg m} \\ \text{Momento debido a la carreta } P &= 2\,806 \text{ » } \end{aligned}$$

$$\text{Suma} = 3\,176 \text{ Kg m}$$

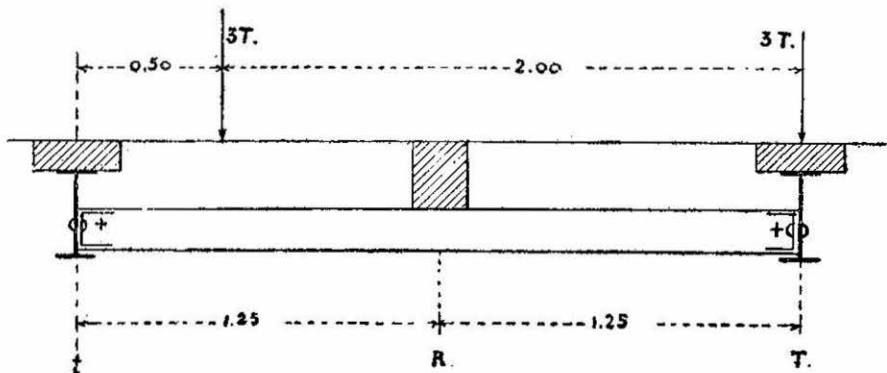
$$\begin{aligned} \text{Resulta una tasa a la flexion} &3\,176:652=4.72 \text{ Kg mm}^2 \\ \text{i una compresion de} &12\,700:69=1.84 \text{ » } \end{aligned}$$

$$\text{Se tiene } \alpha = 6.56 \text{ Kg mm}^2$$

Por lo que antecede se ve que en el caso en que trabaja la viga a mayor tasa α , en el caso 1) en que resulta 8.6 K por milímetro cuadrado.

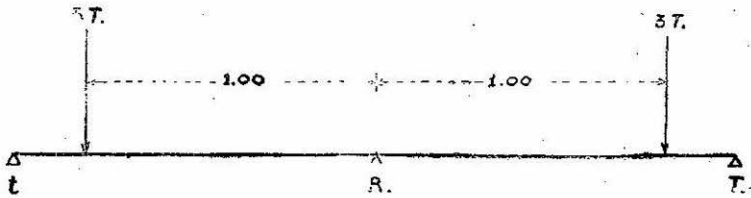
La mayor estension que debe sufrir el tirante es de $17\,400:2=8\,700$ kilos; adoptando como tirantes carros de $1\frac{3}{4}''=44.4 \text{ mm}^2$ se obtiene un esfuerzo unitario de $8\,700:1\,548=5.6 \text{ K}$ por mm^2 . El esfuerzo que se admite por el hilo de la tarrajadura es 600 kilos por centímetro cuadrado.

Cálculo de los travezaños entre vigas principales:



I. Se ha elegido para la carreta la posición de la figura i por las tablas se obtiene el valor de las reacciones:

$$t = 0.5 \times 3\,000 = 1\,500 \text{ Kg} \quad R_1 = 0.56 \times 3\,000 = 1\,680 \quad T = 2\,820$$



II. En este caso se tiene para reaccion los valores siguientes:

$$t = 0.73 - 0.05 = 0.68 \times 3\,000 = 2\,040 \text{ Kg}$$

$$R = 0.31 + 0.31 = 0.62 \times 3\,000 = 1\,860 \text{ Kg}$$

La posición mas desfavorable para el travezaño es el II en que debe soportar 1 860 Kg. Es evidente que el tablonado inferior del puente reducirá mucho este valor.

El momento flexionante de este travezaño es: $930 \times 1.25 = 108\,300 \text{ Kg cm}^2$

Tomando para travezaño un D/T laminado de 0,15 altura que tiene un $\frac{I}{V} = 98 \text{ cm}^3$ se tiene

$$\sigma = 108\,300 : 98 = 11,05 \text{ Kg mm}^2$$

La viga de madera R, descansa sobre estos travezaños, pieza que puede considerársela apoyada en 3 apoyos a 3,20 uno de otro.

El momento mas desfavorable que trasmite la carga 1 860 Kg sobre esta, se encuentra a 0,4 l.

La reaccion $t = 0,4 l \times 1\,860 = 763 \text{ Kg}$.

Momento máximo $= 763 \times 1.6 = 11\,880 \text{ Kg cm}$.

El $\frac{I}{V}$ de la viga $R = 2\,080$.

Resulta entónses $\sigma = \frac{11\,880}{2\,080} = 57 \text{ Kg por cm}^2$

Algunos de los cálculos anteriores han sido comprobados tomando en cuenta las líneas influencia de Kart i Portes.

JERMAN HOLTHEUER.