Año XX Marzo Núm. 3

ANALES

DEL

INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

# Determinación y relaciones recíprocas de las líneas de influencia en las vigas, según los métodos de Roberto Land

(Trabajo hecho en la Sección Obras Nuevas de los FF. CC. del E.—Chile)

*(Continuación)*

Las ordenadas $e_1$ y $e_2$ representan, por consiguiente, los ángulos de rotación de las tangentes $b_1$ y $b_2$ respecto al eje de referencia.

La línea de momentos correspondiente a la elástica (fig. b), pasará, a la izquierda de C, por los puntos fijos izquierdos y a la derecha de C, por los puntos fijos derechos, puesto que los tramos que se hallan a la izquierda y a la derecha de C se encuentran descargados.

Si se dibujan las elásticas correspondientes a las superficies de momentos situadas a la izquierda y a la derecha de C [como polígonos funiculares de ciertas fuerzas $\omega$, con una distancia polar cualquiera; pero igual para ambas elásticas] se obtendrá la forma general de la elástica como en la figura c). Además, los ejes de referencia respectivos $O_1$ y $O_2$ deben cortar a la elástica a plomo de los apoyos, ya que el área de momentos fué determinada bajo esta condición.

Esto nos da una excelente comprobación gráfica de la exactitud del cálculo y del dibujo, por ser aquella particularidad muy sensible aún a los pequeños errores. Girando, ahora, todo el trozo derecho de la elástica con su eje de referencia $O_2$ y su tangente $b_2$, alrededor de C, hasta que $O_2$ coincida con la prolongación de $O_1$ y sin modificar las ordenadas de la elástica, inmediatamente se obtendrá, entre las tangentes $b_1$ y $b'_2$ como ya se ha explicado, la representación gráfica de la unidad de medida para las ordenadas de la elástica (o línea de influencia) $e = P = 1^t = 1^{tm}$.

Si se quiere evitar la rotación, refiriendo las líneas de influencia sencillamente a los ejes $O_1$ y $O_2$, la unidad de medida será según lo antedicho, $e = e^1 + e_2$ Fig. c).

La misma unidad para las ordenadas se obtiene sumando o restando al ángulo entre $b_1$ y $b_2$, medido en la forma ya conocida, el ángulo $\omega$ comprendido entre $O_1$ y $O_2$. Esto se ha hecho en la figura por traslación paralela de $\omega$. (Se

sumó $\omega$ en la figura; pero cuando $O_2$ queda sobre la prolongación de $O_1$ habrá que restarlo).

### c) Línea de infuencia de una reaccion de apoyo *

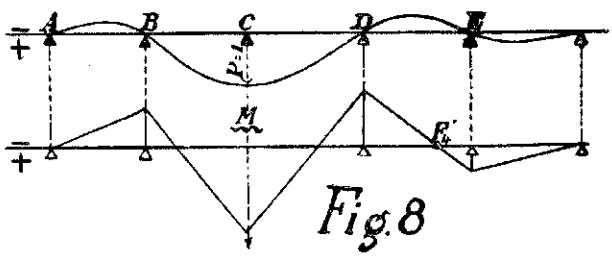
Esta puede considerarse como la elástica de la viga que resulta haciendo bajar el punto C considerado, en una cantidad $P = 1$, por efecto de una carga positiva (dirigida hacia abajo) aplicada en C e imaginando suprimido el apoyo C.

Se dibuja para esta forma de carga la línea de momentos y después con cualquier distancia polar el funicular de las fuerzas $\omega$ deducidas del área de momentos, entonces la elástica obtenida representa la línea de influencia buscada.

La unidad de las ordenadas es la flecha medida a plomo de C y es igual por consiguiente a $P = 1_t$.

De la dependencia entre la flecha encontrada en C y el área de momentos, puede deducirse, inversamente, el área de momentos que produce un descenso dado en el punto de apoyo C, estableciendo una sencilla relación.

Tratándose de la línea de influencia de la reacción de apoyo en el extremo izquierdo A de la viga, la línea de momentos producida por el descenso del punto de apoyo A, es una línea recta quebrada que parte de A, llega sobre el apoyo vecino B y en los demás tramos pasa por los puntos fijos derechos F'.




Si se trata de la línea de influencia de la reacción de apoyo para un apoyo intermedio habrá que determinar primeramente los puntos fijos en el tramo hipotético que resulta de suprimir el apoyo intermedio y en seguida con auxilio de esos puntos fijos se determinarán los momentos negativos en los apoyos vecinos, $M_B$ y $M_D$ y también el momento positivo $M_C$, siguiendo un procedimiento gráfico como el de Mohr o el de Steiner.

Los puntos fijos de los demás tramos quedan invariables.

---

* La determinación de esta línea de influencia se ha agregado aquí por su sencilla relación con las consideraciones anteriores. Con ella completamos todas las líneas de influencia necesarias para el cálculo de una viga continua cualquiera.

## Observacion

Para la resolución de los problemas anteriores es preciso determinar las elásticas de una misma viga correspondientes a varias áreas de momentos.

Si se trata de vigas de alma llena y sección variable, es conveniente calcular primero las fuerzas $\omega$ correspondientes a los elementos o divisiones adoptadas para el área de momentos que resulta de tomar un momento $M = 1$ constante en toda la viga.

Después, en los distintos casos de carga, se multiplicará la ordenada media del área de momentos correspondiente al elemento considerado, por esa fuerza auxiliar $\omega$ que se había calculado. Cuanto mayor sea el número de tramos y de elásticas que haya que determinar, mayor será la economía de operaciones aritméticas al adoptar este procedimiento.

En vigas enrejadas puede procederse exactamente del mismo modo despreciando la variación de longitud de las barras de celosía (montantes y diagonales) debida a la deformación general y considerando únicamente los momentos en los nudos de las cabezas.

En otros casos se puede proceder aprovechando las fuerzas $\omega$ calculadas para dibujar las elásticas que dan los puntos fijos (fig. 6), aceptando que sobre el apoyo intermedio de cada dos tramos vecinos se ha aplicado un momento $M = 1$.

Para una superficie de momentos cualquiera, limitada por una recta, situada entre dos apoyos consecutivos $(n - 1)$ y $(n)$, y cuyas ordenadas de apoyo son $M_{n-1}$ y $M_n$, se calcularán las fuerzas $\omega$ por medio de la relación:

$$\omega = M_{n-1} \times \omega_{n-1} + M_n \times \omega_n$$

En esta expresión $\omega_{n-1}$ y $\omega_n$ son las fuerzas parciales que han formado las resultantes $W''_{n-1}$ y $W'_n$ (véase fig. 6).

Aunque parece superfluo aún haremos notar que todas estas construcciones gráficas pueden acompañarse del cálculo numérico, considerando las ordenadas de las elásticas (funiculares) como momentos producidos por las fuerzas $\omega$.

## § V.—**Líneas de influencia de los momentos de tensión en vigas enrejadas**

### 1) *Cabezas*

Si se designan la tensión $\left\{ \begin{array}{l} \text{de la cabeza sup. por O} \\ \text{de la cabeza inf. por U} \end{array} \right\}$, los momentos respectivos en los nudos opuestos por $\left\{ \begin{array}{c} M_o \\ M_u \end{array} \right\}$, los brazos de palanca por $\left\{ \begin{array}{c} o \\ u \end{array} \right\}$, se calcularán las tensiones en las cabezas por medio de las fórmulas conocidas:

$$\left\{ \begin{array}{l} O.o = - M_o \\ U.u = + M_u \end{array} \right\}$$

Los valores O.o y U.u los llamaremos *momentos de tensión.*

Las líneas de influencia de los momentos de flexión $M_o$ y $M_u$ pueden pues ser tratadas igualmente como líneas de influencia de los *momentos de tensión* (− O.o) y (+ U.u).

Designando las cargas por P y las ordenadas de las áreas de influencia de los momentos de flexión o de tensión que están a plomo de las fuerzas por $\eta^o$ y $\eta^u$, se calcularán las tensiones en las cabezas por medio de las ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} -O.o = \Sigma P.\eta^o \quad \text{De donde: } O = -\dfrac{1}{o} \Sigma P.\eta^o \\ +U.u = \Sigma P.\eta^u \quad \text{»} \quad \text{»} \quad : U = +\dfrac{1}{u} \Sigma P.\eta^u \end{array} \right.$$

### 2) *Barras de celosía*

De una manera análoga se puede proceder con las barras de celosía y calcular sus tensiones S por medio de las áreas de influencia para momentos de tensión determinados S.s. Estos momentos se deducen gráficamente de las áreas de iufluencia de los momentos de flexión como se verá más adelante.

Se hace un corte trasversal a la diagonal (r — 1) (r') que sube hacia la derecha (fig. 9) y cuya tesión S se quiere determinar y se establece la ecuación de momentos respectó del nudo opuesto (r) de la cabeza inferior. Suponemos que esta cabeza es la que recibe los trasvesaños.

Designando por o, o', s las distancias de los puntos (r — 1) y (r) a O y S fig. 9), la ecuación de momentos toma la siguiente forma:

$$S.s + O\ o' + M_r = 0$$

De donde:

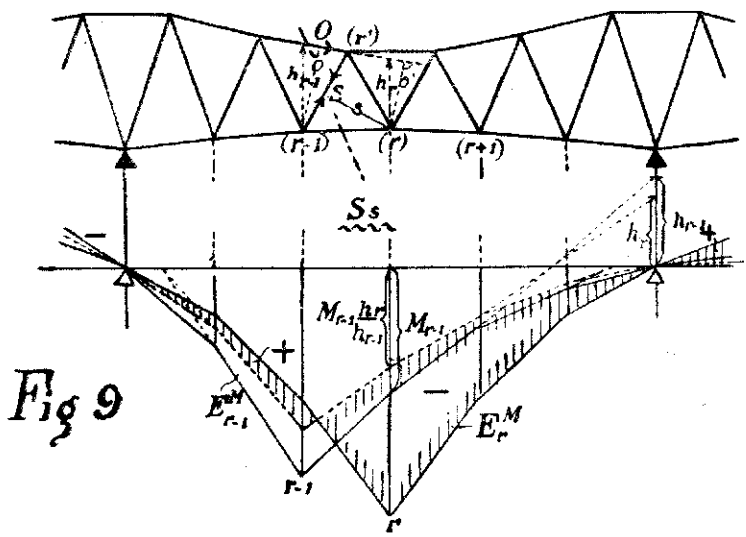
$$S.s = -(O.o' + M_r)$$

Pero además:

$$O = -\frac{M_{r-1}}{o}$$

Por consiguiente se tiene:

$$6)\ \ldots\quad S.s = M_{r-1}\ .\ \frac{o'}{o} - M_r = M_{r-1}\ .\ \frac{h_r}{h_{r-1}} - M_r$$




siendo $h_{r-1}$ y $h_r$ los segmentos de las verticales comprendidos entre (r — 1), (r) y la cabeza O.

Esta es la ecuacion para el momento de tensión S.s, en la cual $M_{r-1}$ y $M_r$ son momentos simultáneos para una carga cualquiera.

En el caso de una carga aislada móvil estos momentos se determinan por

medio de las ordenadas de las líneas de influencia de $M_{r-1}$ y $M_r$ que quedan a plomo de la fuerza.

Se desprende la fórmula anterior que el valor S s para cada nudo, tratándose de una carga aislada, se puede determinar gráficamente de una manera sencilla por medio de $E^M_{r-1}$ y $E^M_r$.

Esto se ha hecho en el nudo (r + 1), como lo manifiesta claramente la figura 9. *

Según esto la superficie hachurada es el área de influencia del momento de tensión S.s. En el lugar en que la ordenada de esta área es nula se encuentra el punto límite de S para el cual se tiene la relación: $M_{r-1} \frac{o'}{o} = M_r$, por consiguiente:

$$\frac{M_{r-1}}{M_r} = \frac{o}{o'} = \frac{h_{r-1}}{h_r}$$

Esta igualdad se verifica casi siempre dentro del paño en el cual se encuentra la diagonal (S).

Para una diagonal que asciende hacia la izquierda se hacen análogas consideraciones por lo cual no volveremos a insistir en esto.

## Algunas consecuencias

1) Para cabezas paralelas es $h_{r-1} = h_r$ y se tiene simplemente:

$$S\,s = M_{r-1} - M_r$$

es decir:

*La diferencia de las áreas de influencia de $M_{r-1}$ y $M_r$ determina inmediatamente el área de influencia del momento de tensión S.s.*

Se demostró anteriormente que $M_r - M_{r-1} = V_r \cdot \lambda_r$ (fórmula 1) en que $V_r$ significa el esfuerzo de corte que obra en el paño $\lambda_r$.

Para cabezas paralelas se deduce pues:

$$S.s = - V_r \cdot \lambda_r$$

---

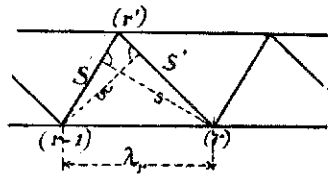
* La línea de influencia de $M_{r-1} \cdot \frac{h_r}{h_{r-1}}$ es afin con $E^M_{r-1}$ respecto al eje origen como eje de afinidad; por eso es que basta la determinación de un punto para que las demás puedan encontrarse por medio de aquella relación afin, como se muestra en la fig. 9.

Por medio de esta igualdad se llega pues a la conocida relación:

$$S = -V_r \cdot \frac{\lambda_r}{s}$$

Esta expresión no sólo sirve para cabezas paralelas horizontales sino que también para cabezas paralelas inclinadas (como ocurre en arcos enrejados) entre

Fig. 10




las cuales se encuentra la diagonal. De la deducción anterior se deriva la evidencia de este aserto.

2) Sean, en una viga de cabezas paralelas (fig. 10); S s y S's' los momentos de tensión de dos diagonales que salen de un nudo (r') de la cabeza no cargada, tomados respecto de los nudos opuestos de la cabeza cargada, (r), (r — 1). Hechas estas designaciones aplicaremos la relación anterior:

$$S.s = M_{r-1} - M_r = -V_r \cdot \lambda_r \qquad \text{y analogamente:}$$

$$S's' = M_r - M_{r-1} = -V_r \cdot \lambda_r = -S\,s \qquad \text{Es decir:}$$

*el área de influencia de (S.s) sirve al mismo tiempo para (S's'); pero con el signo contrario.*

De esto se desprenden las siguientes conclusiones ya conocidas a las que hemos llegado por distinto camino:

*a*) Si una diagonal es tendida, la otra es, al mismo tiempo, comprimida.

*b*) La forma de carga más desfavorable que da la tensión máxima en una diagonal es igualmente la forma de carga más desfavorable que produce el máximo de compresión en la otra diagonal.

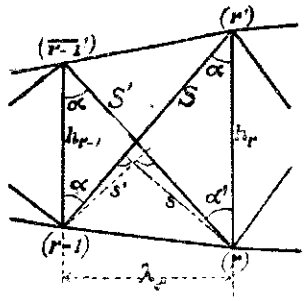
*c*) Las tensiones S y S' son entre sí como las longitudes de las barras correspondientes I y I'; pues bien, de la última igualdad se deduce, haciendo abstracción del signo:

$$\frac{S}{S'} = \frac{s'}{s} = \frac{I}{I'}$$

## § VI. — Viga enrejada de crucetas sencillas con montantes rígidos y diagonales (contradiagonales) que solo pueden trabajar a la tracción.

La figura 11 muestra un paño ( $\lambda_r$ ) de una viga semejante. En lo que sigue se supone que solamente existe la diagonal (r — 1) (r') que sube hacia la derecha y se designa su momento de tensión respecto al nudo opuesto (r) de la cabeza cargada por S.s.

Fig. 11




Las longitudes de los montantes verticales en (r — 1) y (r) se designan por $h_{r-1}$ y $h_r$.

Entonces según 6) se tiene:

$$S.s = M_{r-1} \cdot \frac{h_r}{h_{r-1}} - M_r = h_r \left( \frac{M_{r-1}}{h_{r-1}} - \frac{M_r}{h_r} \right)$$

Si $\alpha$ es el ángulo que forma la diagonal S con la vertical, se tiene, $\frac{s}{h_r} = \text{sen}\,\alpha$; por consiguiente resulta:

$$S \text{ sen } \alpha = \frac{M_{r-1}}{h_{r-1}} - \frac{M_r}{h_r}$$

Si se imagina ahora que en el paño $\lambda_r$ sólo existe la diagonal (r) $\overline{(r-1')}$ y se designa el momento de tensión respecto al nudo opuesto (r — 1) de la cabeza cargada por S's', se deduce igualmente, cambiando $M_{r-1}$ por $M_r$ y $h_{r-1}$ por $h_r$:

$$S's' = M_r \frac{h_{r-1}}{h_r} - M_{r-1} = - h_{r-1} \left( \frac{M_{r-1}}{h_{r-1}} - \frac{M_r}{h_r} \right)$$

$$S' \text{sen}\,\alpha' = - \left( \frac{M_{r-1}}{h_{r-1}} - \frac{M_r}{h_r} \right) = - S \text{ sen } \alpha$$

Esto significa que si existe una vez una de las diagonales y otra vez la otra, las proyecciones horizontales de las tensiones S y S' son iguales para la misma carga; pero tienen distinto signo.

Además se deduce:

$$\frac{S\,s}{S'\,s'} = -\frac{h_r}{h_{r-1}}$$

Es decir: las ordenadas $\eta$ y $\eta'$ de las áreas de influencia de (S s) y (S' s') tienen en todas partes la misma relación $\frac{\eta}{\eta'} = -\frac{h_r}{h_{r-1}}$.

Según esto, las líneas de influencia dibujadas respecto de una línea recta de referencia son afines, véase figura 12.

La posición más desfavorable que da la tensión máxima en una diagonal es, al mismo tiempo, la posición más desfavorable que produce el máximo de compresión en la otra.

Se deduce de lo anterior que si existen simultáneamente ámbas diagonales; pero capaces de resistir solamente tracción (de manera que para las distintas posiciones de la carga cuando una trabaja a la tracción la otra se afloja) basta dibujar para ámbas diagonales una sola área de influencia.

Esta área se compondrá únicamente de las partes positivas de cada una de las áreas de influencia que en la figura 12 están hachuradas.

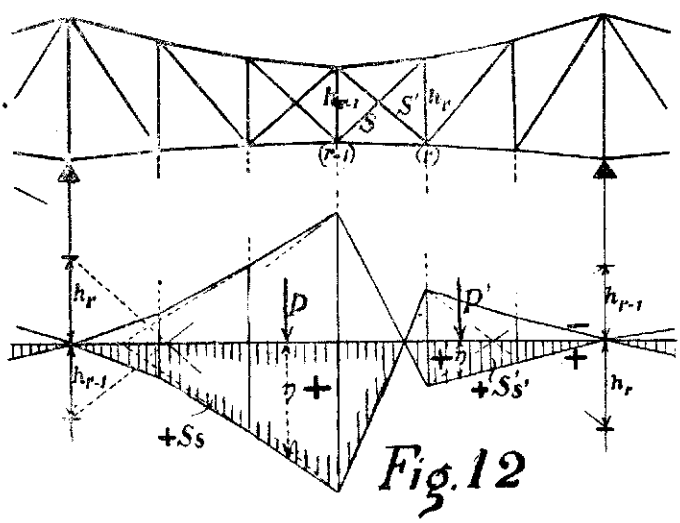



Fig. 12

Designemos por $\left\{ \begin{matrix} P \\ P' \end{matrix} \right\}$ las cargas que quedan en el interior de las

partes positivas de las áreas de influencia de $\left\{ \begin{matrix} S\,s \\ S's' \end{matrix} \right\}$ y las ordenadas correspondientes de cada área de influencia por $\left\{ \begin{matrix} \eta \\ \eta' \end{matrix} \right\}$, haciendo abstracción del signo.

Ahora bien, si la influencia de cada carga aislada sobre el momento de tensión positivo $\left\{ \begin{matrix} S\,s \\ S's' \end{matrix} \right\}$ la representamos por $\left\{ \begin{matrix} P\ \eta \\ P'\ \eta' \end{matrix} \right\}$, se tendrá, para un sistema de cargas cualquiera:

$$S\ s = \Sigma\, P\ \eta - \Sigma\, P'\ \eta = \Sigma\, P\ \eta - \frac{h_r}{h_{r-1}}\ \Sigma\, P'\ \eta'$$

$$S'\ s' = \Sigma\, P'\eta' - \Sigma\, P\ \eta' = \Sigma\, P'\eta' - \frac{h_{r-1}}{h_r}\ \Sigma\, P\ \eta = -(S\ s)\ \frac{h_{r-1}}{h_r}$$

Aquel momento de tensión que aquí resulta positivo es el que actúa.

Si se buscan solamente los momentos máximos de tensión producidos por el tren en la posición más desfavorable, se tiene sencillamente:

$$\text{máx}\quad S\ s = \Sigma\, P\ \eta$$

y

$$\text{máx}\quad S'\ s' = \Sigma\, P'\ \eta'$$

Para vigas de cabezas paralelas se tiene que $h_{r-1} = h_r$, por consiguiente, de las fórmulas generales se deduce para cualquier forma de carga:

$$S\ s = \Sigma\, P\ \eta - \Sigma\, P'\ \eta'$$

$$S'\ s' = \Sigma\, P'\ \eta' - \Sigma\, P\ \eta = -\,S\ s$$

Considerando separadamente el peso propio y la carga rodante y habiéndose ya dibujado las áreas de influencia para las diagonales sucesivas que van dirigidas en el mismo sentido, se puede determinar fácilmente en qué paños se necesitan contradiagonales.

Para encontrar las posiciones más desfavorables respectivas que sirven para el cálculo de las cabezas y montantes de los paños en que hay contradiagonales, se debe siempre considerar aquellas diagonales que son tendidas a causa de la colocación del tren. Esto se deduce fácilmente de las áreas de influencia.

Las investigaciones hechas en I, II, V y VI sirven tanto para una viga sencilla como para una viga continua.

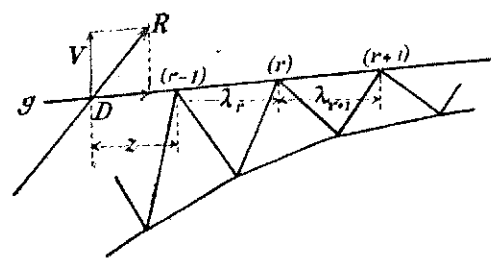
## B.—VIGAS EN ARCO

### § VII.—Consideraciones sobre las líneas de influencia correspondientes a los momentos flexionantes en los nudos de la cabeza recta de un arco.

Las particularidades deducidas en II son aplicables con ciertas limitaciones a los arcos de cualquier clase y también son aplicables a las líneas de influencia de los momentos flexionantes en los nudos de la mitad de una cabeza superior rectilínea.

Se consideran tres nudos consecutivos $(r-1)$, $(r)$ y $(r+1)$ de tal cabeza $g$ Fig. 13, entre los cuales no obra ninguna carga. Se designa por $R$ la la resultante de todas las fuerzas que obran a la izquierda de ellos (incluída la reacción de apoyo) y se descompone $R$ en el punto $D$ de intersección con $g$ en una fuerza vertical $V$ y en una fuerza dirigida según $g$.

Fig. 13




Si $z$ es la distancia horizontal entre $D$ y $(r-1)$ se tendrán las siguientes ecuaciones:

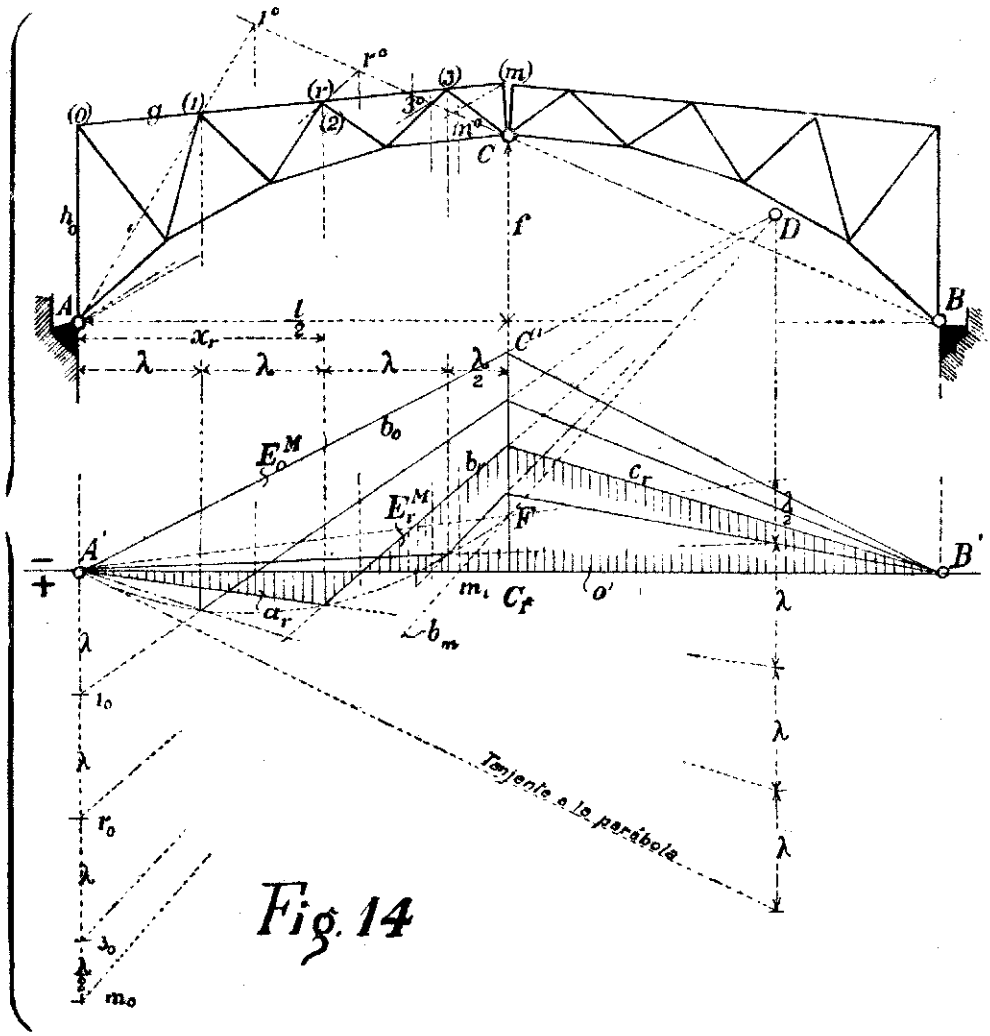
$$\left.\begin{aligned} M_{r-1} &= V\,z \\ M_r &= V\,(z+\lambda_r) \\ M_{r+1} &= V\,(z+\lambda_r+\lambda_{r+1}) \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} M_r - M_{r-1} &= V\,\lambda_r \\ M_{r+1} - M_r &= V\,\lambda_{r+1} \end{aligned}\right\} \text{ Por consiguiente:}$$

$$\frac{M_r - M_{r-1}}{M_{r+1} - M_r} = \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}$$

Como esta ecuación es idéntica a la ecuación 2) de adelante, rigen también los teoremas 2. y 4. demostrados en el capitulo II.

*a)* Arco de tres rótulas A, B, C. — Fig. 14

Designemos por f la flecha del arco (hasta la rótula del vértice: C), por




$h_0$ la altura de los montantes extremos y únicamente para abreviar designemos por r'|P la proyectante vertical trazada por el punto P . *

* r' indica aquí solamente la dirección vertical y no guarda ninguna relación con r.

Como es sabido, la línea de influencia $E_r^M$ de $M_r$ se compone de tres rectas $a_r$, $b_r$, $c_r$ que se cortan entre sí a plomo de los puntos (r) y C. De estas rectas la del medio, $b_r$, corta al eje de referencia o' en la vertical que pasa por $r_o$, punto de intersección de A (r) con B C. El punto $r_o$ es punto límite, puesto que una carga situada a plomo de él no produce momento en (r).

Si se elige la escala de fuerzas igual a la escala de longitudes (es decir, la representación gráfica de $1^t$ igual a la representación gráfica de $1^m$) $b_r$ corta a la recta r'|A en un punto $r_o$ para el cual se tiene: $A'r_o = x_r$ que es la distancia horizontal entre A y (r) *

Por este medio la línea de $M_r$ queda completamente determinada.

Si se dibujan las demás líneas de influencia siguiendo este procedimiento y si los paños son iguales, de acuerdo con el teorema 4, interceptan segmentos iguales en las verticales trazadas por los nudos. De aquí se deduce que las líneas b deben cortarse todas en un punto D, puesto que ellas son las rectas de unión de puntos que se encuentran en perspectiva en filas verticales.

Si se consideran los nudos extremos (o) y (m) que están sobre r'|A y r'|C se obtendrá D como punto de intersección de las rectas $b_o$ y $b_m$. La última recta $b_m$ se obtiene por medio del procedimiento ya explicado: se determinan $m_o$ (punto de intersección de A (m) con B C) y su proyección $m_1$ sobre o' y se hace $A' m_o = \frac{1}{2}$ igual a la mitad de la luz, así se obtiene $b_m$ que es $m_o m_1$.

La recta $b_o$ que pasa por A' se deduce tomando la ordenada $\overline{C_1 C'}$ a plomo de C.

Si obra en (m) una fuerza de $1^t$ el momento respecto a (o) es:

$$M_o^m = H_m \; h_o$$

($H_m$ es el empuje horizontal correspondiente) y para aquella carga se tendrá, como ya se sabe:

$$H_m = \frac{l}{4\,f} \cdot 1^t \quad \text{De aquí se deduce:}$$

$$\overline{C_1 C'} = M_o^m = \frac{l \cdot h_o}{4\,f} \cdot 1^t$$

---

* En otro caso se tendría:

$$\overline{A'r_o} = \frac{x_r}{l} \cdot 1^t \quad \text{Véase III. a).}$$

Además de la figura se deduce fácilmente: si F es el punto de intersección de $m_0 m_1$ con $r'|C$ y se traza A' F, esta recta, junto con el haz de rectas A' (a) interceptan sobre $r'|D$ nuevamente segmentos iguales $\lambda$.

Los puntos en que se cortan las rectas a y b, por ser puntos de intersección de dos haces de proyección A' (a) y D (b) con un haz que parte del infinito en el sentido vertical, se hallan sobre una parábola de eje vertical que tiene las siguientes particularidades: pasa por los puntos A' F D y corta al eje de referencia en la vertical bajada desde el punto de intersección de g con B C *

### *b*) Arcos de dos rótulas A, B Fig. 15

En la Fig. 15 se ha dibujado la línea de influencia $E^H$ del empuje horizontal H. Sea $\delta$ la unidad de las ordenadas (es decir, por ej.: $\delta^{mm} = 1^t$). En este caso la línea de influencia de un momento de flexión $E^M_m$ por ejemplo $E^M_2$ se deducirá de la relación:

$$M_2 = \mathfrak{M}_2 - H.h \qquad \text{o} \qquad \frac{M_2}{h} = \left(\frac{\mathfrak{M}_2}{h} - H\right)$$

en que $\mathfrak{M}_2$ es el momento producido por la carga en una viga correspondiente estáticamente determinada (H = 0).

Ahora bien, dibujemos el área de influencia de $\frac{\mathfrak{M}_2}{h}$ según el capítulo III a), como un triángulo (referido al mismo eje de $E^H$) cuyos lados interceptan el segmento $\frac{x_2}{h} . 1^t = \frac{2\lambda}{h} . \delta$ en la vertical trazada por A.

El área de influencia de $\frac{M_2}{h}$ se obtiene en la diferencia del área de influencia ya dibujada y la de H a la escala: $1^t = \delta^{mm}$ o se tiene inmediatamente el área de influencia de $M_2$ a la escala: $1^{tm} = \frac{1}{h^m} . \delta^{mm}$

Para los casos límites en que el nudo está sobre la vertical de A o B se tendrá $\mathfrak{M} = 0$, por consiguiente:

$$\frac{M_0}{h} = \frac{M_6}{h} = -H$$

---

* Por la misma razón los vértices de las líneas de influencia de los momentos de una viga simple se encuentran también sobre una parábola que está dibujada en la Fig. 3.

Es decir: las áreas de influencia de $\frac{M_o}{h}$ y $\frac{M_6}{h}$ son iguales al área negativa de H que en la Fig. 15a) está dibujada sobre el eje de referencia (parte de signo negativo) y que está designada por $E_o^{\overline{M}} = E_6^{\overline{M}}$.

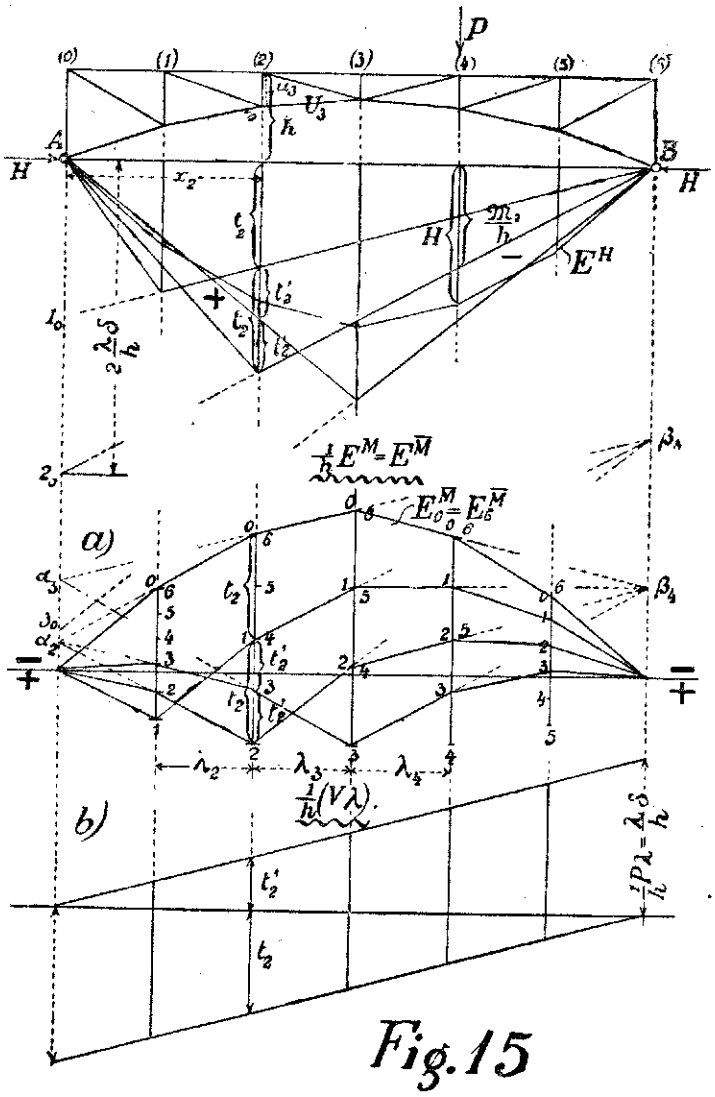



Fig. 15

Ahora bien, según el teorema 4 las otras $E^M$ interceptan segmentos iguales en las verticales trazadas por los nudos y estos segmentos (t y t') son iguales a aquellos que quedan determinados por las líneas de influencia de $\frac{\mathfrak{M}}{h}$.

Además estos trazos (como en la Fig. 3) pueden deducirse de la línea de influencia de $\frac{1}{h}$ (V $\lambda$) que está dibujada en la Fig. 15 b.

De esto se deduce el siguiente procedimiento para determinar todas las demás $E^{M}$ (Fig. 15 a): *

Se traza $E^{H}$ hacia arriba del eje adoptado y en la vertical de un nudo determinado (m) (véase m = 2) se aplica el segmento $t^{m}$ desde $E^{H}$, m veces hacia abajo y desde el vértice m encontrado se aplica el segmento $t'_{m}$, $m' = (s - m)$ veces hacia arriba (siendo la luz igual a s $\lambda$).

Así se obtiene desde el primer hasta el último punto de división los puntos de intersección de $E_1^{\overline{M}}$ a $E_m^{\overline{M}}$ y de $E_{m\ 1}^{\overline{M}}$ a $E_6^{\overline{M}}$ respectivamente (Véase el problema 2 del capítulo III b).

En la Fig. 15 a) están dibujadas $E_1^{\overline{M}}$, $E_2^{\overline{M}}$ y $E_3^{\overline{M}}$.

De la relación que existe entre la Fig. 15 a) y 15 b) se deduce además:

Los lados de las $E^{\overline{M}}$ que se encuentran en un paño determinado $\lambda_m$ (Por ej.: $\lambda_3$) y aquellos lados pertenecientes a los nudos que quedan a la $\left\{ \begin{matrix} \text{derecha} \\ \text{izquierda} \end{matrix} \right\}$ de $\lambda_m$ se cortan en un punto $\left\{ \begin{matrix} \beta_m \\ \alpha_m \end{matrix} \right\}$ de la vertical que pasa por el apoyo $\left\{ \begin{matrix} \text{derecho} \\ \text{izquierdo} \end{matrix} \right\}$; con otras palabras:

*todas las partes de las $E^{\overline{M}}$ que salen del extremo* $\left\{ \begin{matrix} \text{derecho} \\ \text{izquierdo} \end{matrix} \right\}$ *del eje de referencia y que en general llegan hasta los vértices más bajos r a plomo de (r) son entre sí afines y el eje de afinidad correspondiente es la vertical del apoyo* $\left\{ \begin{matrix} \text{derecho} \\ \text{izquierdo} \end{matrix} \right\}$.

(Continuará).

---

* Aquí haremos notar que la manera de representar el área de influencia de $\frac{M}{h}$, indicada en la Fig. 15 de arriba (como diferencia del área triangular variable de $\frac{\mathfrak{M}}{h}$ y el área invariable de $E^{H}$) no deja que desear en cuanto a sencillez. En la práctica se determina cuál es la solicitación máxima por medio de un papel móvil que tiene dibujado el sistema de cargas, por cuyo motivo es recomendable referir el área de influencia a una recta origen como se indica en la Fig. 15 a).

No cabe duda que este procedimiento es más cómodo, más claro y sobre todo más conveniente, puesto que se logra obtener ordenadas más grande, en cuanto es posible, en obsequio a la precisión.