Pablo Pérez Z.

Determinación de la altura crítica en los lechos de la práctica

En las diferentes cuestiones que se presentan en Hidráulica es muy frecuente que se necesite conocer la altura crítica para un gasto y forma de lecho dados. Si bien esto no representa ninguna dificultad en los canales de forma rectangular, al igual que en los triangulares y parabólicos, que es poco común encontrar, se complica el problema, cuando la sección es trapecial o se trata de un acueducto. El cálculo exacto hay que efectuarlo por tanteos, que resultan largos y molestos, teniendo que auxiliarse en el caso de los acueductos, de tablas que nos permitan obtener con más facilidad los elementos geométricos necesarios; o bien, si se trata de lechos trapeciales, recurrir a suposiciones o a fórmulas aproximadas.

En el presente artículo nos proponemos resolver en forma racional el problema de encontrar la altura crítica correspondiente a un gasto dado que escurre en un lecho de forma trapecial o en un acueducto u otro tipo de lecho. Expondremos primeramente las consideraciones que nos han permitido llegar a los resultados elaborados: un gráfico y un abaco que nos dan inmediatamente la altura crítica buscada, y cuyo valor obtenido es rigurosamente exacto.

Recordemos que hay escurrimiento crítico, cuando se verifica la relación:

1) $$Q = \Omega \sqrt{\frac{g\,\Omega}{l}}$$

en que Q es el gasto que escurre y que en los casos de la práctica es siempre el dato, Ω la sección del agua y l el ancho superficial. El problema de encontrar la altura crítica se reduce a buscar qué altura de agua produce los valores adecuados de Ω y l, que nos satisfagan la expresión 1).

En los lechos rectangulares, triangulares y parabólicos, las expresiones de Ω y l son funciones monomias de la altura h, por lo que al reemplazar sus valores resultan sencillas ecuaciones que permiten despejar el valor de la altura crítica h. Esto no ocurre en los lechos trapeciales, en que el ancho superficial y la sección son funciones binomias y no homogéneas de la altura; en los acueductos circulares, tales expresiones son trascendentes de una función de la altura (el ángulo al centro) y en los acueductos ovoides normales u otros lechos, esos valores a más de trascendentes son complicados y su expresión es distinta según entre qué valores se considere la altura. Por tales razones, no es posible en estos casos obtener en forma explícita el valor de la altura crítica h.

Pero analicemos más detenidamente el problema, ocupándonos primero del lecho trapecial; llamando b la base del trapecio y $tg\alpha$ la semisuma de las tangentes de las inclinaciones de los taludes respecto a la vertical, y reemplazando los valores de Ω y l en la expresión 1), obtenemos:

$$2) \qquad Q = (bh + h^2\, tg\alpha) \sqrt{g\, \frac{bh + h^2\, tg\alpha}{b + 2h\, tg\alpha}}$$

Ecuación de la cual no es posible despejar h. Tampoco se podría buscar una solución gráfica general de esta fórmula, pues la altura crítica h es una función implícita de tres variables independientes, que son Q, b y $tg\alpha$.

La solución habría que encontrarla en un abaco, lo cual en este caso de tres variables independientes resultará muy complicado; pero como vamos a ver, estas tres variables independientes se pueden reemplazar por otras dos, con lo que la construcción del abaco no ofrece dificultad.

Para esto dividamos ambos miembros de la expresión 2) por $b^{5/2}$:

$$\frac{Q}{b^{5/2}} = \left(\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2}\, tg\alpha\right) \sqrt{g\, \frac{\frac{h}{b} + \frac{h^2}{b^2}\, tg\alpha}{1 + 2\frac{h}{b}\, tg\alpha}}$$

y llamemos $Q_1 = \frac{Q}{b^{5/2}}$ y $h_1 = \frac{h}{b}$, con lo que nos queda:

$$3) \qquad Q_1 = (h_1 + h_1^2\, tg\alpha) \sqrt{g\, \frac{h_1 + h_1^2\, tg\alpha}{1 + 2h_1\, tg\alpha}}$$

En esta fórmula la incógnita es h_1, y datos o las variables independientes Q_1 y $tg\alpha$. Así la construcción del abaco resulta sencilla, tanto más si atendemos a que una de las variables, $tg\alpha$, en la práctica sólo tiene muy determinados valores.

Si suponemos constante el valor de $tg\alpha$, la expresión 3) nos representa una relación entre dos variables Q_1 y h_1, cuya curva representativa se puede construir. Esto es lo que se ha hecho para los valores más usuales de $tg\alpha$, constituyendo el abaco que nos permite obtener inmediatamente el valor de la altura crítica de un gasto que escurre por un lecho trapecial. Basta para ello formar la razón entre Q y $b^{5/2}$, y entrando al abaco con este valor se obtiene para el talud correspondiente el valor de la altura crítica relativa h_1, que multiplicada por la base b nos da la altura crítica buscada h. Hagamos como ejemplo el cálculo para un gasto de 2 m³ : seg. que escurre por una cuneta trapecial de 1,60 mts. de base y con taludes de ½:

Formamos la razón $\frac{Q}{b^{5/2}} = \frac{2}{1{,}6^2\sqrt{1{,}6}} = 0{,}617$ y entrando con este valor al abaco y para el talud de $^1/_2$, hallamos que $\frac{h}{b} = 0{,}320$, luego la altura crítica buscada es $h = 1{,}6 \cdot 0{,}32 = 0{,}512$ metros.

Tratemos ahora el mismo problema en los lechos circulares; llamando φ el ángulo al centro, y r el radio, las expresiones de la sección y el ancho superficial son: $\Omega = r^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \right)$ y $l = 2r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$ que reemplazadas en 1) queda:

$$4) \qquad Q = r^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \right) \sqrt{g \frac{r^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \right)}{2\, r \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}}$$

y dividiendo como anteriormente ambos miembros de la ecuación 4) por $r^{5/2}$ y llamando $Q_l = \frac{Q}{r^{5/2}}$ nos queda:

$$5) \qquad Q_l = \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi \right) \sqrt{g \frac{\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \varphi}{2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}}}$$

relación entre Q_l y el ángulo φ correspondiente al escurrimiento crítico. Como no es posible despejar φ en función de Q_l, bastará para resolver el problema recurrir a un gráfico que nos presente la relación 5) entre Q_l y φ, del cual podamos obtener φ conocido Q_l. Pero como lo que buscamos es la altura que equivale al ángulo φ y como ésta es una función de aquélla, o mejor dicho de la altura relativa $h_l = \frac{h}{r}$, ligados por la relación $h_l = 1 - \cos \frac{\varphi}{2}$, convendrá más que llevemos en el gráfico en vez de la relación entre Q_l y φ, los valores correspondientes entre Q_l y h_l que es lo que hemos hecho.

Para comprender mejor las consideraciones que haremos más adelante, al tratar el caso general de un lecho de forma cualquiera, cuyo contorno sea una curva que tenga o no ecuación, conviene observar que la fórmula 5) se puede interpretar como una relación numéricamente igual a la que nos ligaría la condición de crisis en el acueducto circular de radio unitario y en que el gasto fuese Q_l, lo mismo que la relación 3) nos representaría la condición de crisis en el lecho de sección trapecial, cuya base fuese igual a la unidad, y el gasto Q_l.

Ahora bien, para cualquier forma de lecho, en que la única condición que le imponemos a los distintos tamaños de ellos, es ser geométricamente semejantes, la sección y el ancho superficial, lo mismo que la altura de agua o cualquier otro elemento geométrico, se pueden expresar en función de los mismos elementos del lecho de dimensiones unitarias. Cumplida esta condición se podrá escribir que

$\Omega = r^2\Omega_I$, $l = rl_I$. y $h = rh_I$, en que r es la longitud de aquel elemento geométrico que cuando vale la unidad nos determina el lecho que hemos llamado de dimensiones unitarias, y Ω_I, l_I y h_I son los valores numéricos de la sección, ancho superficial y altura de agua de este mismo lecho.

Estos valores los reemplazamos en la expresión 1), que queda:

$$Q = r^2 \Omega_I \sqrt{g \frac{r^2 \Omega_I}{r\, l_I}}$$

y dividiendo ambos miembros por $r^{5/2}$ y llamando $Q_I = \frac{Q}{r^{5/2}}$ queda:

$$Q_I = \Omega_I \sqrt{g \frac{\Omega_I}{l_I}} \tag{6}$$

Pero como Ω_I y l_I son funciones de la altura de agua h_I podremos decir finalmente que Q_I es una función de h_I a través de la expresión 6).

Estas consideraciones nos indican la forma de obtener el gráfico que nos dará la altura crítica: bastará para cada altura h_I del lecho de dimensión unitaria, calcular el Ω_I y el l_I correspondientes que nos permiten obtener Q_I, con lo que podremos construir la función $Q_I = f\,(h_I)$.

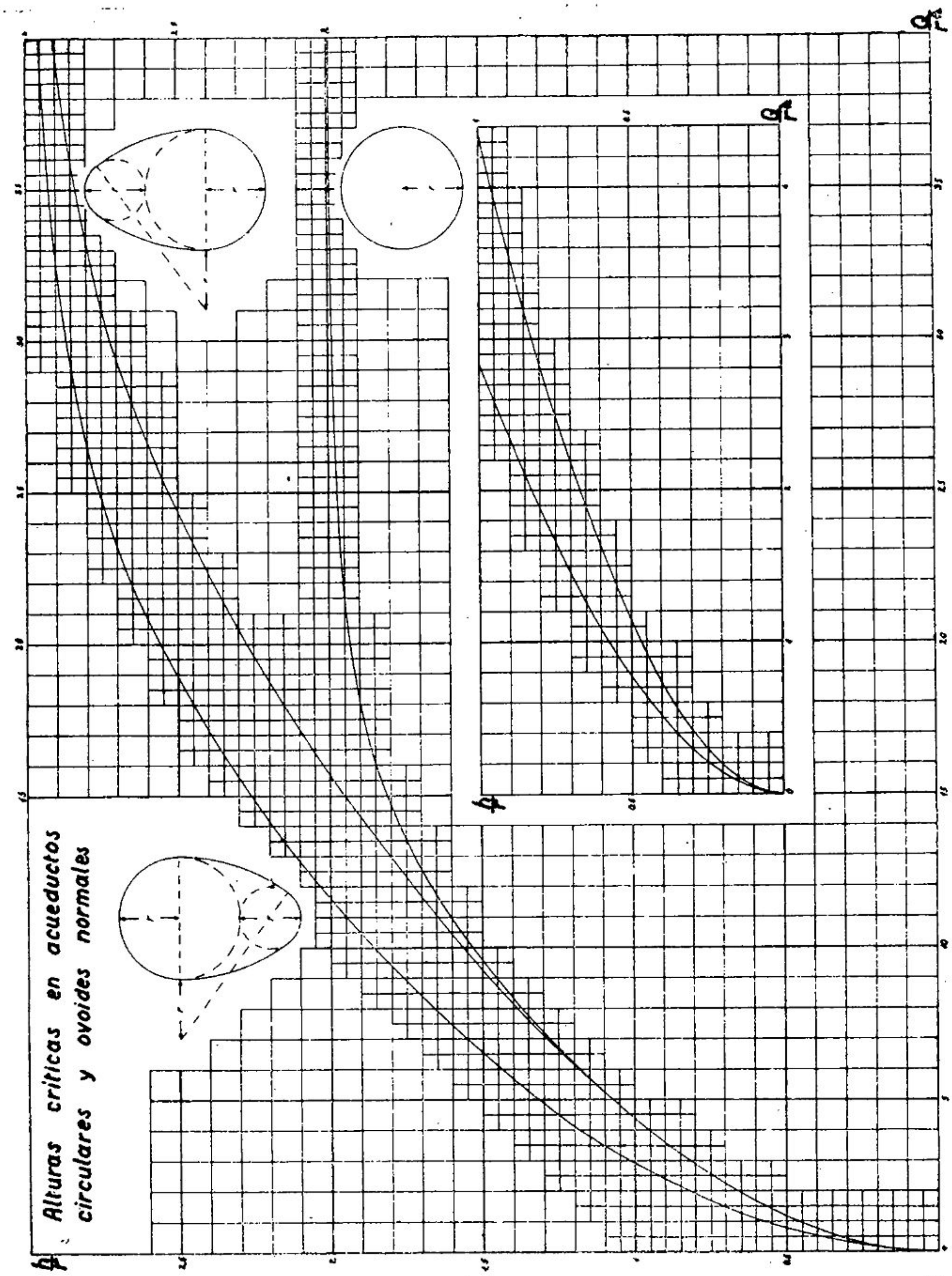
Esto hemos hecho para los dos tipos de acueductos ovoides normales, cuyos gráficos se han dibujado junto con el del círculo. Como es lógico uno de ellos coincide con el circular hasta la altura relativa igual a *1*.

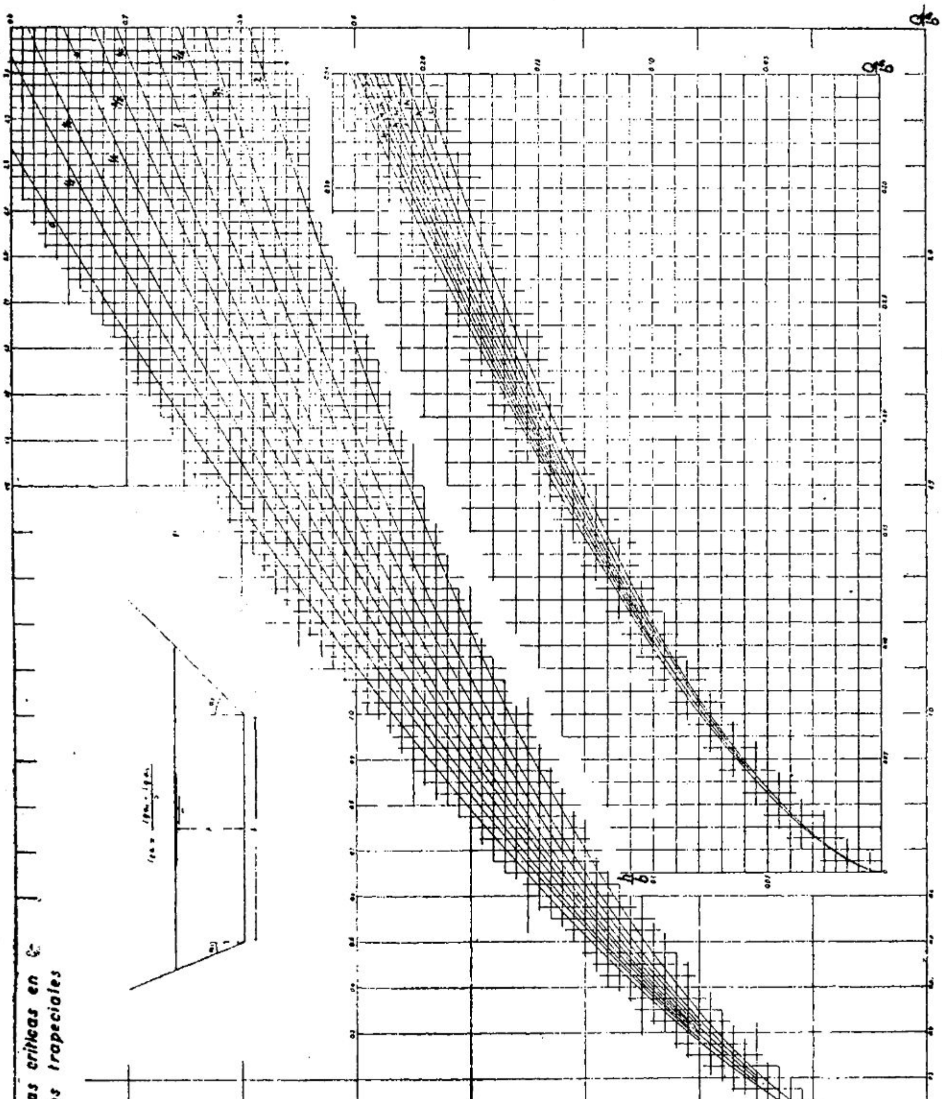
Para obtener la altura crítica de un acueducto se procede como, anteriormente, formando la razón entre Q y $r^{5/2}$, y entrando con este valor al gráfico, conocemos h_I que multiplicado por r nos da la altura crítica. Busquemos la altura crítica para un acueducto circular de 1,50 metros de diámetro, y con un gasto de 1 m³. seg.:

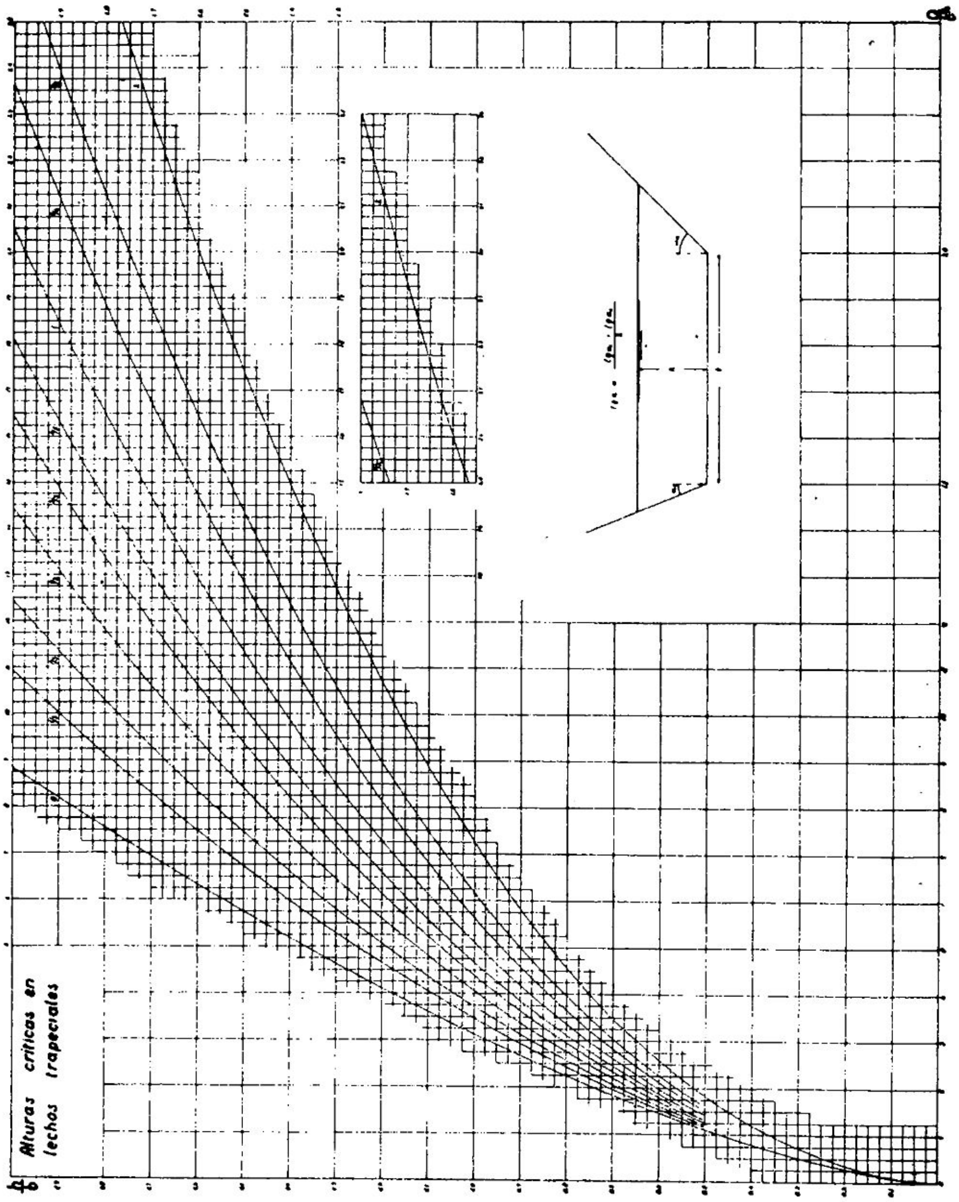
$$\frac{Q}{r^{5/2}} = \frac{1}{0{,}75^2 \cdot \sqrt{0{,}75}} = 2{,}06$$

del gráfico obtenemos para este valor una altura relativa de 0,677, de donde se deduce que la altura crítica vale $h = 0{,}677 \cdot 0{,}75 = 0{,}508$ *metros*.

Es curioso anotar que al reducir el problema al hecho unitario, el gasto hay que dividirlo por la potencia *5/2* de una longitud, que se explica por la necesidad de que la fórmula 6) sea homogénea.


Alturas críticas en acueductos
circulares y ovoides normales


Alturas críticas en lechos trapeciales


Alturas criticas en lechos trapeciales