ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Calle San Martín N.° 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

Año XXXII · Marzo de 1932 · N.° 3

Carlos Krumm S.

Métodos gráficos para el trazado de curvas diferenciales

EN la técnica se presentan casos en que se da una curva en su trazado gráfico y se necesita conocer su diferencial. Tal sucede, por ejemplo, en las líneas de espacio y tiempo, variación del flujo magnetico con relación al tiempo, etc.

A continuación indicamos los métodos gráficos más conocidos.

1) Se reemplaza la curva dada $Y=F(x)$ por un polígono circunscrito, tangente a la curva tal como P_1 P_2, P_3. Se trazan en seguida por el polo 0' (00'=1) los radio polares 0'1 0'2, 0'3. Las paralelas 1 p_1, 2 p_2 3 p_3, - - al eje de las X determinan una línea escalonada en cuyos trazos horizontales y en las abcisas correspondientes, de P_1, P_2, P_3 se encuentran los puntos p_1, p_2, p_3 de la curva diferencial

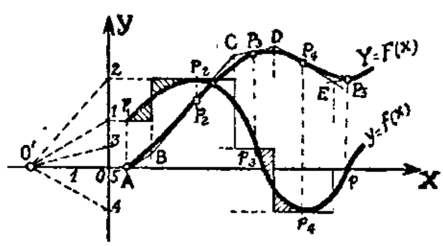

FIG. 1

$$y' = F'(x).$$

Esta curva debe trazarse de modo que haya compensación de las áreas limitadas por la curva diferencial y la línea escalonada, tal como se indica en la fig. 1. [1]

---

[1] Ver Hütte, pág. 163, tomo I, 25 edición.

2) R. Slaby [2] ha indicado el siguiente procedimiento. Sea la curva $y = f$

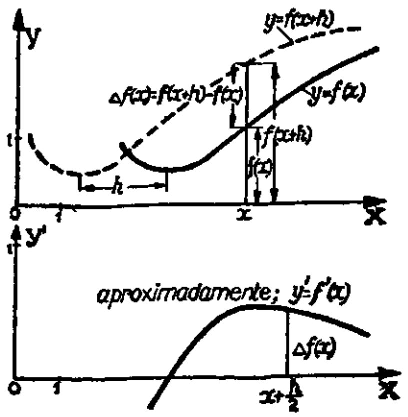

FIG.2

(fig. 2) que se trata de diferenc Con auxilio de un papel transpare se corre la curva hacia la izquie en la distancia h, obteniéndose la va de segmentos. En la abcisa obtendrá la diferencia

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Si construímos una curva con ord das iguales a esta diferencia y cu abcisas sean $x + \frac{h}{2}$ (o sea con a sas desplazadas en $\frac{h}{2}$ hacia la c cha) obtenemos aproximadam $y' = f'(x)$, la curva derivada. La e la de y' es naturalmente h veces la escala de y. Esta construcción supone en ces que $f(x+h) - f(x)$ es aproximadamente proporcional a $f'\left(x + \right.$ con el factor de proporcionalidad h, o sea:

$$f(x+h) - f(x) = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En otros términos el cuociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

o sea la inclinación de la cuerda $P\overline{P}$ se aproxima a la inclinación de la tanjente en el punto Q, cuya abcisa es el promedio de las abcisas de P y $\overline{P}$.

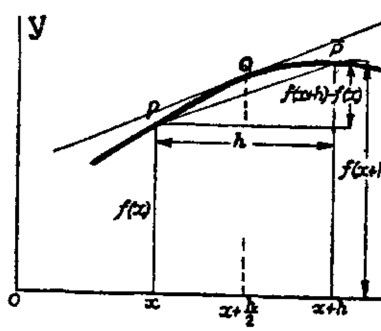

FIG.3

Para averiguar el grado de aproximación del procedimiento gráfico se puede escribir, según el teorema de Taylor:

$$f(x+h) = f\left[\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{2}\right] = f\left(x + \frac{h}{2}\right) + h/2\, f'\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$+ \frac{(h/2)^2}{2!} f''\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{(h/2)^3}{3!} f'''(\xi_1)$$

(2) Z. V. D. I. 1913, pág. 821, reproducido en Dubbel ed. española, tomo I, pág. 172.

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) +$$

Poniendo $\quad x - a = -\frac{h}{2}$

$$a = x + \frac{h}{2}$$

se puede escribir:

$$f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - \frac{h}{2} f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{(h/2)^2}{2!} f''\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$- \frac{(h/2)^3}{3!} f'''(\xi_2)$$

ξ_1 es un punto intermedio entre $x + \frac{h}{2}$ y $x + h$. ξ_2 es un punto intermedio entre x y $x + \frac{h}{2}$.

Restando se obtiene:

$$f(x+h) - f(x) = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{8.6} \left[f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right]$$

$\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}$ es un valor intermedio entre $f'''(\xi_1)$ y $f'''(\xi_2)$. Si $f'''(x)$ es continua, podremos poner $\frac{f''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$ en que ξ es un valor entre x y $x + h$.

Se obtiene entonces:

$$f(x+h) - f(x) = h f'\left(x + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{24} f'''(\xi)$$

$$f'\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi)$$

El cuociente diferencial es entonces igual a la derivada en la mitad del intervalo con un error que disminuye con el cuadrado del desplazamiento h y en el que interviene la tercera derivada con el pequeño coeficiente $\frac{1}{24}$. Para el caso de una recta $y = ax + b$ y una parábola $y = ax^2 + bx + c$ habrá coincidencia del coeficiente diferencial con la derivada para $f'''(x) = 0$.

A. Walther [3] hace notar que Slaby está equivocado al suponer que lo m sucede con la sinusuoide. En efecto, para y = sen x, la tercera derivada f''' (x) = — puede alcanzar el valor máximo 1, de modo que como error máximo se p llegar a $\frac{h^2}{24}$.

En la figura 4 se ha hecho la diferenciación con h = 0,75 y se han tomado las mismas escalas para y e y'. Para comparar se ha dibujado la derivada exacta y' = cos x. Para valores más pequeños de h el resultado es aún más exacto (p. ej. para h = 0,5 se llega a 1 %) y prácticamente coincide la curva con y' = cos x.

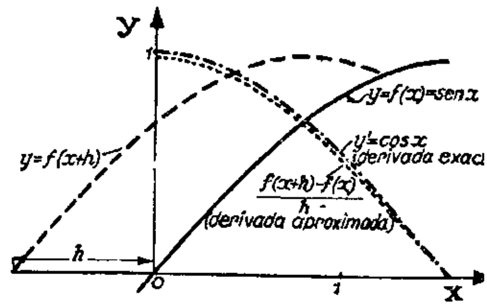

FIG. 4

(3) Z. V. D. I. Nov. 1931, pág. 1398.