

ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

SAN MARTIN 352

—

CASILLA 487

—

SANTIAGO

Sucesor

De la:

Y del:

«SOCIEDAD DE INGENIERIA» «INSTITUTO DE INGENIEROS»
Fundada el 31 de mayo de 1888 Fundado el 28 de octubre de 1888

Con Personalidad Jurídica desde el 28 de diciembre de 1900

Adherido a la USAI y a la CONFERENCIA MUNDIAL DE LA ENERGIA

AÑO LXVI • MAYO - JUNIO DE 1953 • N.ºs 5 - 6

Comisión Editora: Raúl Sáez S. (Pdte.), Sergio Silva, Alberto Covarrubias, Rodrigo Flores y Marcelo Honorato.

Análisis de Normas Europeas y Norteamericanas de Pandeo

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural
por el ing. Elías Arce L.

I. INTRODUCCION

El Instituto Nacional de Investigaciones Tecnológicas y Normalización (Inditecnor) inició en 1950 los estudios tendientes a la modernización de las normas chilenas para el cálculo de estructuras de acero. Este trabajo se consideró necesario por el auge de la construcción metálica que, era lógico suponer, vendría como una consecuencia del establecimiento de la Planta Huachipato de la Compañía de Acero del Pacífico.

La adopción de normas de cálculo y diseño en países de mayor desarrollo que el nuestro, resulta generalmente del análisis de la experiencia constructiva existente y de extensos y costosos estudios de Laboratorio.

El comité de acero, sin embargo, consideró que las condiciones del país no justificaban por ahora dicho procedimiento, y se decidió establecer normas provisionales basadas en un estudio de las especificaciones existentes en otros países, las que serían modificadas paulatinamente de acuerdo con la experiencia adquirida.

En este trabajo se presenta un análisis comparativo de algunas normas americanas y europeas de pandeo, con el objeto de usarlo como antecedente para las normas chilenas.

En las partes I y II se exponen las teorías clásicas de pandeo de la columna ideal y la columna imperfecta, adoptadas como base por las diversas normas, y

se llega a la conclusión de que tanto las normas alemanas como las francesas y americanas siguen el mismo criterio básico y que las fórmulas usadas son fundamentalmente equivalentes.

En las partes III y IV se estudian los problemas relativos a las condiciones de los extremos e imperfecciones iniciales, y se establece que este último factor es el responsable por las apreciables diferencias entre las fatigas de trabajo de las normas europeas y americanas.

En la V parte se hace una exposición de las normas DIN 1050, DIN 4114, Francesas de Urbanismo, Asociación Americana de Ingenieros de Ferrocarriles (AREA), Asociación Americana de Caminos (AASHO) e Instituto Americano de Construcciones Metálicas (AISC).

Finalmente, en la parte VI se presenta un análisis crítico de los diversos factores anteriores y se hacen recomendaciones concretas para la adopción de fórmulas de pandeo en las normas provisionales de Inditecnor.

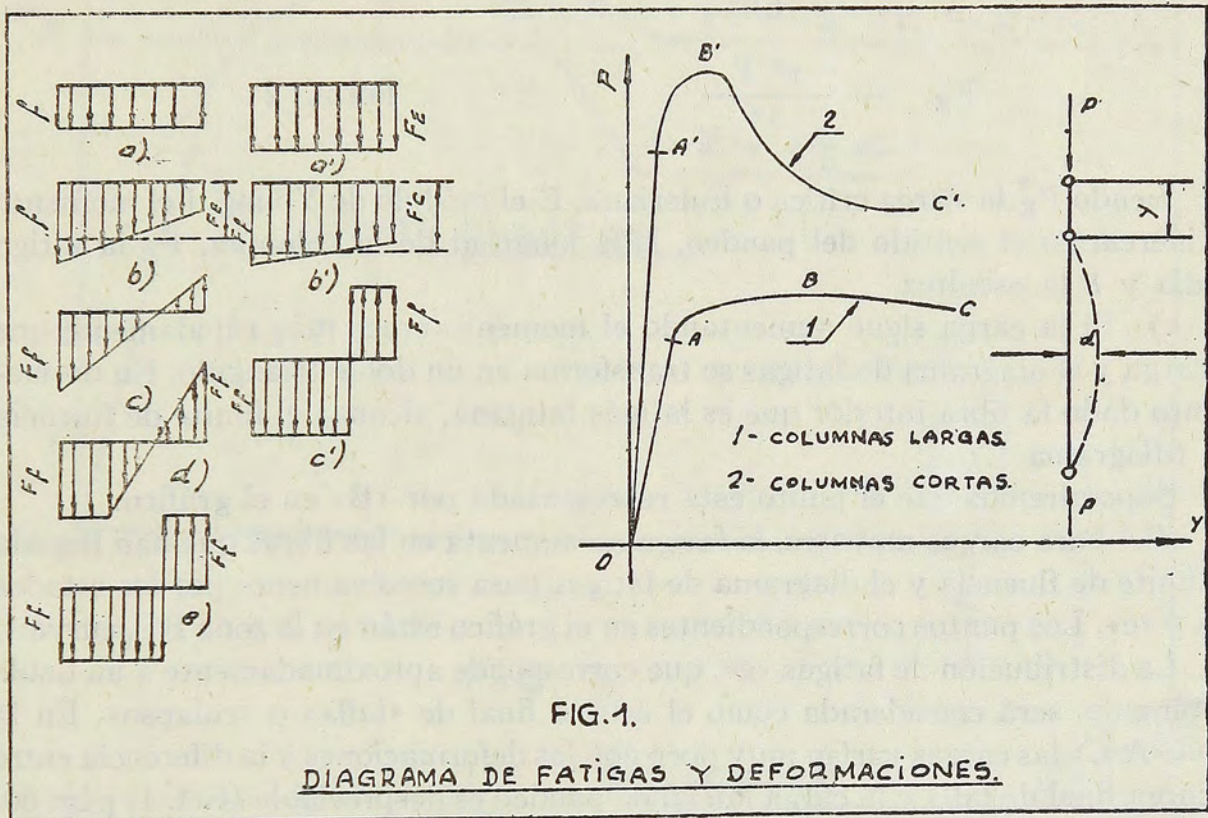
Los símbolos se definen la primera vez que aparecen y se han agrupado en una tabla para mayor conveniencia.

Una lista de la Bibliografía usada se da al final del trabajo. Las referencias hechas numéricamente a lo largo del trabajo se refieren a dicha Bibliografía.

SÍMBOLOS

A	Parámetro en las fórmulas propuestas.
a	Parámetro en la fórmula de la secante.
B	Parámetro en las fórmulas propuestas.
C	Parámetro en las fórmulas propuestas.
	Constante experimental en las fórmulas francesas de urbanismo.
E	Módulo de Elasticidad de Young.
E'	Módulo Tangente de Elasticidad.
E _r	Módulo reducido o doble módulo de Engesser-Von Kármán de Elasticidad.
e ₁	Excentricidad equivalente a falta de homogeneidad del material.
e ₂	Excentricidad equivalente a curvatura inicial.
e ₃	Excentricidad de aplicación de las cargas.
e	Excentricidad total equivalente.
F	Fatiga admisible de pandeo.
F _f	Fatiga en el límite de fluencia.
F _E	Fatiga dada por la fórmula de Euler.
F _c	Fatiga crítica o de falla.
F _p	Fatiga en el límite de proporcionalidad.
F _o	Parámetro en las fórmulas francesas de urbanismo.
I	Momento de inercia.
K	Constante de reducción de la longitud de pandeo.
l	Luz libre de pandeo.
λ	Esbeltez.
λ'	Esbeltez crítica en el límite de aplicación de la fórmula de Euler.
λ ₁	Parámetro en las fórmulas propuestas.
M	Momento de flexión.
m	Parámetro en las fórmulas DIN 4114.
n	Parámetro en las fórmulas propuestas.

- P_E Carga crítica en la fórmula de Euler.
 P'_E Carga crítica en la fórmula generalizada de Euler.
 r Radio de giro.
 r_o Radio del núcleo central.
 s Factor de seguridad.
 v Distancia del eje neutro a la fibra más alejada.
 y Flecha.
 Y_o Flecha máxima inicial.



1. TEORIA DE LA COLUMNA IDEAL

Las teorías clásicas de pandeo se basan en la existencia de la «columna ideal» para lo cual se supone que se cumplen las siguientes condiciones:

- 1) La columna es recta.
- 2) El material es homogéneo.
- 3) La carga actúa en el C. de G. de la sección, y
- 4) Los extremos son articulaciones perfectas.

Es costumbre dividir las columnas ideales en «columnas largas» y «columnas cortas».

Columnas largas. Si se carga gradualmente una columna larga de acero estructural se pueden distinguir las siguientes etapas en el proceso de deformaciones:

a) Un período inicial de compresión pura; la distribución de fatigas en una sección cualquiera corresponde al diagrama «a», Fig. 1, con una fatiga «f» menor que el límite elástico. Si se lleva un gráfico esfuerzos-deformaciones, los puntos están dentro de la porción recta O A de la curva 1. El equilibrio es estable.

b) Al llegar la carga a cierto valor crítico, la columna se deforma lateralmente y el fenómeno se convierte de compresión pura en una flexión compuesta, en que la carga es «P» y el momento máximo «P d». La distribución de fatigas es trapezoidal con una fatiga máxima «f» menor que el límite elástico del material. El punto correspondiente en el gráfico está representado por «A» de la curva 1. La carga crítica, en que se inicia el pandeo, está dada por las fórmulas clásicas de Euler:

$$P_E = \frac{\pi^2 E I}{L^2} \quad \text{Form. 1}$$

$$F_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{Form. 2}$$

Siendo P_E la carga crítica o Euleriana, E el módulo de Young, I el momento de inercia en el sentido del pandeo, L la longitud de la columna, F_E la fatiga media y λ la esbeltez.

c) Si la carga sigue aumentando el momento crece más rápidamente que la carga y el diagrama de fatigas se transforma en un doble triángulo. En un momento dado la fibra interior que es la más fatigada, alcanza el límite de fluencia F_f (diagrama C).

Supondremos que el punto está representado por «B» en el gráfico.

d) Para cargas mayores, la fatiga no aumenta en las fibras que han llegado al límite de fluencia y el diagrama de fatigas pasa sucesivamente por los estados «d» y «e». Los puntos correspondientes en el gráfico están en la zona BC, curva 1.

La distribución de fatigas «e», que corresponde aproximadamente a un doble rectángulo, será considerada como el estado final de «falla» o «colapso». En la zona «A C» las cargas varían muy poco con las deformaciones y la diferencia entre la carga final de falla y la carga inicial de pandeo es despreciable (Ref. 1, pág. 60; 2, pág. 85).

Columnas cortas.

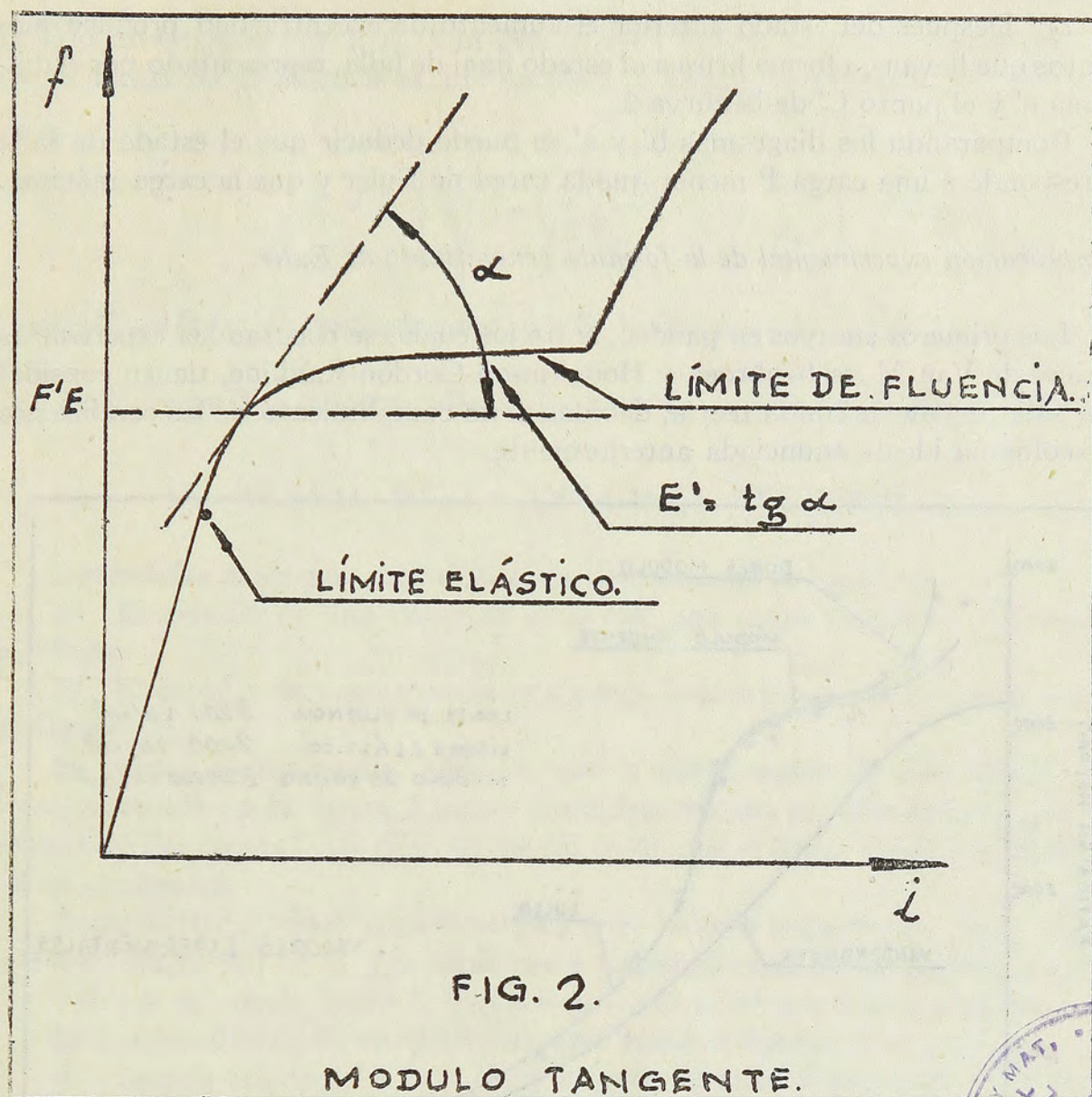
a) En una columna corta, la carga crítica de Euler se produce a una fatiga F_E muy cercana al límite de fluencia y mayor que el límite elástico. Las distribuciones de fatigas corresponden al diagrama «a» y el punto representativo del gráfico es «A'» en la curva 2 de la Fig. 1.

La carga crítica, en la cual empieza el pandeo, está dada por las fórmulas generalizadas de Euler debidas a Engesser:

$$P'_E = \frac{\pi^2 E' I}{L^2} \quad \text{Form. 3}$$

$$F'_E = \frac{\pi^2 E'}{\lambda^2} \quad \text{Form. 4}$$

en que E' es el módulo tangente de elasticidad, o sea, la inclinación de la curva típica fatiga-deformación del material para el valor correspondiente de F'_E (figura 2).



De acuerdo con lo anterior, el punto de separación entre «columnas largas» y «columnas cortas» se obtiene para la esbeltez crítica en que la fatiga de Euler es igual al límite elástico o de proporcionalidad F_p .

$$\lambda' = \pi \sqrt{\frac{E}{F_p}}$$

Form. 5

b) Al aumentar la carga, el diagrama de fatigas se transforma en un trapecio (Fig. 1-b) y se alcanza un valor máximo de P representado por el punto «B» en la curva 2. F. R. Shanley ha demostrado (Ref. 3) que el valor máximo de « P » está dado por la fórmula generalizada de Euler, empleando en lugar de E el módulo reducido, «módulo de Engesser-Von Kármán» o «Doble módulo» dado por la expresión:

$$E_R = \frac{4 E E'}{(\sqrt{E} + \sqrt{E'})^2}$$

Form. 6

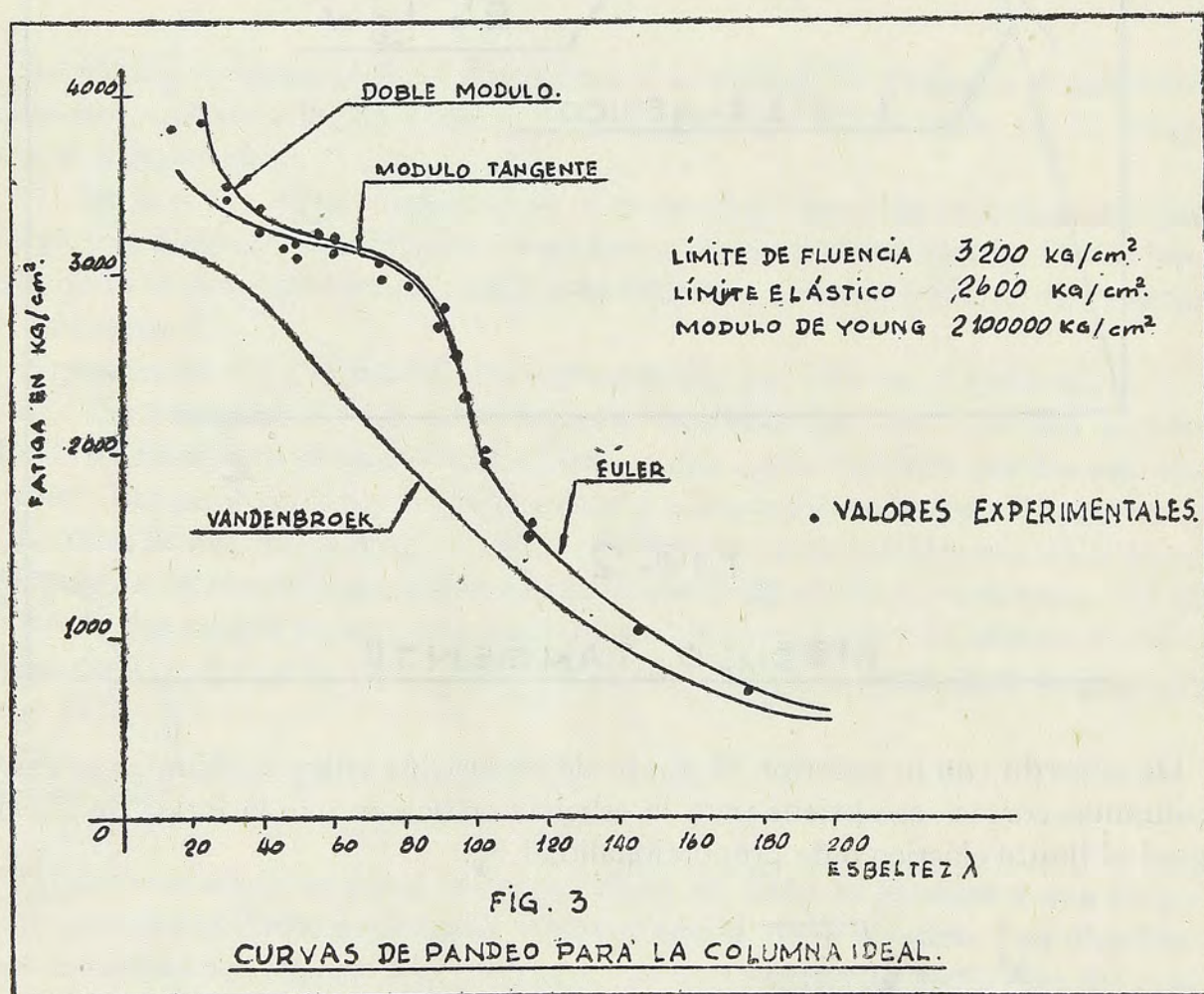
(Ref. 1, pág. 159; Ref. 10, pág. 179.)

c) Después del estado anterior el aumento de excentricidad produce momentos que llevan en forma brusca al estado final de falla, representado por el diagrama c' y el punto C' de la curva 2.

Comparando los diagramas b' y c' se puede deducir que el estado de falla corresponde a una carga P menor que la carga de Euler y que la carga máxima.

Comprobación experimental de la fórmula generalizada de Euler.

Los primeros ensayos en pandeo, entre los cuales se cuentan las experiencias clásicas de Van Musschenbroek y Hodgkinson-Gordon-Rankine, tienen considerables discrepancias con la teoría, debidas al no cumplimiento de las condiciones de «columna ideal» enunciada anteriormente.



Sin embargo, experiencias posteriores, tales como la de Bauschinger, Considere y Tetmajer y los ensayos modernos del A. S. C. E. Special Committee for Column Research en los EE. UU., los laboratorios Berlin Dahlem, del Instituto Kayser Wilhaem en Alemania y Th. von Kármán en Hungría, en los cuales se han tomado precauciones especiales para cumplir las condiciones de la columna ideal dentro de errores admisibles de experimentación, han demostrado la completa validez de la Teoría generalizada de Euler (Ref. 1, pág. 172).

En la figura 3 se reproducen las curvas de Euler y los resultados experimentales de las experiencias de Von Kármán, citadas por F. R. Shanley (Ref. 3).

Carga de falla.

La carga final de falla o colapso, tanto para columnas largas como cortas,

ha sido investigada por J. A. Van den Brock (Ref. 2, pág. 103), quien supone que la forma de la elástica es una parábola y llega a la expresión:

$$F_c = F_f \left[\sqrt{1 + \left(\frac{F_f}{2 F_E} \right)^2} - \frac{F_f}{2 F_E} \right] \quad \text{Fórm. 7}$$

Donde F_c es la fatiga media de colapso y F_E la fatiga de Euler dada por la fórmula 2.

En la figura 3 se muestra además la curva de colapso según Van den Brock.

II. TEORIA DE LA COLUMNA EXCENTRICA

Las teorías modernas para el análisis de columnas se basan en:

- El estudio de una columna ideal con una carga excéntrica, de excentricidad e .
- El estudio de una columna con carga centrada y una curvatura inicial de flecha « Y_0 ».

Se acepta normalmente, además, que la curva típica de deformación del acero mostrada en la figura 2 puede reemplazarse, sin grandes errores, por un sistema de dos rectas OAB (Fig. 4), de tal modo que el límite elástico y de fluencia se confunden.

Al aumentar gradualmente la carga y para valores pequeños de « e » e « Y_0 » se obtienen diagramas de fatigas similares a los mostrados en los esquemas «b» a «e» y «b'» a «c'» de la figura 1, según se trate de columnas largas o cortas.

Se pueden distinguir en el análisis tres estados típicos:

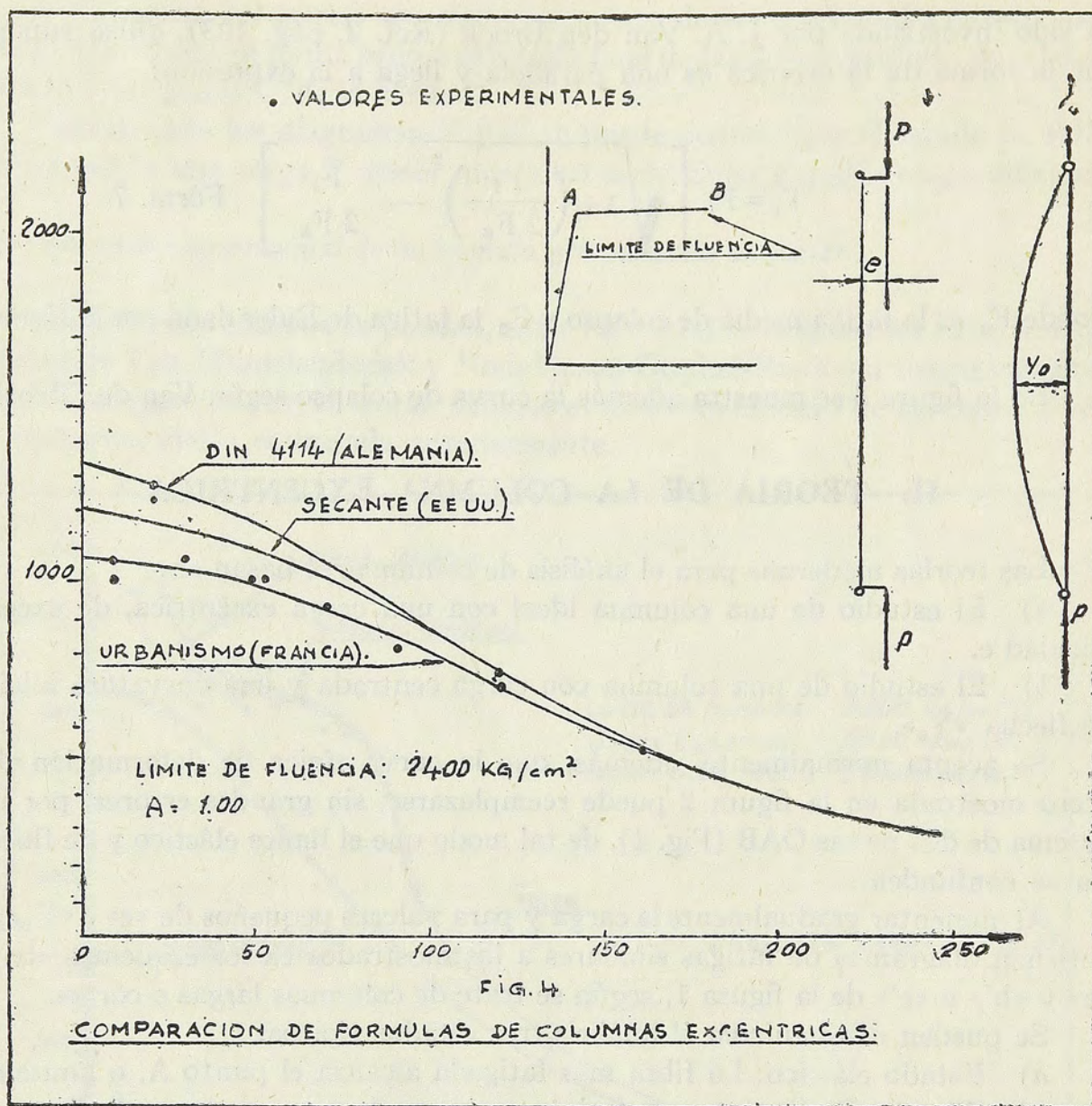
- Estado elástico: La fibra más fatigada alcanza el punto A, o límite de fluencia (Fig. 4). El diagrama de fatigas corresponde a «c» o «b» en la figura 1.
- Estado semidúctil: Las fibras interiores de la columna están en la zona dúctil AB (Fig. 4) y la fibra exterior más fatigada alcanza el límite de fluencia. La repartición de fatigas corresponde al diagrama «d» de la figura 1.
- Estado dúctil: Todas las fibras están dentro de la zona dúctil, con un diagrama de fatigas equivalente a «c» o «c'», figura 1.

Estado elástico.—Si « y » es la flecha en un punto cualquiera de una columna con carga excéntrica y se desprecia la variación de « e » debida a la rotación de los extremos, se puede plantear la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{M}{EI} = - \frac{P(e+y)}{EI} \quad \text{Form. 8}$$

La integración directa de la ecuación anterior lleva a la «Fórmula de la Secante», que es la usada como base por la mayoría de las especificaciones norteamericanas de pandeo.

$$F_c = \frac{F_f}{1 + a \sec \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{F_c}{E}}} \quad \text{Form. 9}$$



En la fórmula anterior

$$F_c = \frac{P}{A} \quad \text{Form. 10}$$

representa la fatiga media en el punto límite elástico definido anteriormente y «a» es un parámetro dado por:

$$a = \frac{e v}{r^2} = \frac{e}{r_0} \quad \text{Form. 11}$$

siendo «v» la distancia entre el eje neutro y la fibra más alejada, «r» el radio de giro y r_0 el radio del núcleo central.

Las especificaciones alemanas DIN 4114 usan una fórmula aproximada, basada en la integración de la ecuación 8, pero haciendo la hipótesis de que la forma de la elástica es sinusoidal.

La fórmula DIN 4114 es (Ref. 4, pág. 613).

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{F_c} \left[1 - \frac{m F_c}{F_f - F_c} + 0,25 \left(\frac{m F_c}{F_f - F_c} \right)^2 - 0,005 \left(\frac{m F_c}{F_f - F_c} \right)^3 \right] \quad \text{Form. 12}$$

expresión en la cual es posible demostrar que:

$$m = \frac{4}{\pi} a \quad \text{Form. 13}$$

Las normas francesas del Ministerio de Reconstrucción y Urbanismo de 1946, que han servido de base a las normas chilenas propuestas por el Instituto Nacional de Investigaciones Tecnológicas y Normalización (Inditecnor 2.30-82.E) suponen una carga centrada sobre una columna que tiene una curvatura inicial sinusoidal de valor máximo Y_o . La expresión de la carga crítica es (Ref. 5)

$$F_c = F_o - \sqrt{F_o^2 - F_E F_f} \quad \text{Form. 14}$$

fórmula en que el parámetro F_o está dado por

$$F_o = \frac{1}{2} [(1+C) F_f + F_E] \quad \text{Form. 15}$$

«C» es una constante proporcional a la flecha inicial.

$$Y_o = C \frac{F_f l^2}{\pi^2 E v} \quad \text{Form. 16}$$

Las expresiones de las tres normas anteriores son similares y dan valores prácticamente equivalentes en la práctica. En efecto, si en la fórmula de la secante se despeja λ se obtiene:

$$\lambda^2 = 4 \frac{E}{F_c} \arccos^2 \frac{a F_c}{F_f - F_c} \quad \text{Form. 17}$$

y desarrollando el arco coseno en serie e introduciendo el valor de «m» de la fórmula 13, se llega a

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{F_c} \left[1 - \frac{m F_c}{F_f - F_c} + 0,31 \left(\frac{m F_c}{F_f - F_c} \right)^2 - 0,168 \left(\frac{m F_c}{F_f - F_c} \right)^3 + \dots \right] \quad \text{Form. 18}$$

expresión que difiere de la fórmula DIN 4114 únicamente en los términos superiores.

El profesor S. Timoshenko (Ref. 1, pág. 178) demuestra que el criterio de considerar una carga excéntrica y el de considerar una curvatura inicial son equivalentes, siempre que entre la excentricidad y la curvatura iniciales exista la relación:

$$e = \frac{\pi}{4} Y_o \quad \text{Form. 19}$$

Introduciendo las expresiones 16, 13 y 11 en la fórmula 16 de las normas francesas, se llega a:

$$C = m \frac{F_E}{F_f} \quad \text{Form. 20}$$

Reemplazando las expresiones 2, 19 y 20 en la fórmula 14 y despejando λ^2 se obtiene para la fórmula francesa la expresión:

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{F_c} \left[1 - \frac{m F_c}{F_f - F_c} \right] \quad \text{Form. 21}$$

fórmula que corresponde a la DIN 4114 y a la de la Secante, si se desprecian los términos superiores y que había sido deducida en forma independiente por E. Chwalla y K. Jezec.

En la figura 4 se representan los valores de las fórmulas de la Secante DIN 4114 y Normas Francesas de Urbanismo para un valor de $a = 1$, como asimismo los resultados experimentales del ASCE. Special Committee for Steel Column Research (Refs. 6 y 7). Se puede apreciar la buena coincidencia entre los valores experimentales y las tres fórmulas.

Estados semidúctil y dúctil.—Algunos investigadores han propuesto tomar los estados dúctil y semidúctil como criterio de falla (J. A. van den Brock, K. Jezec y E. Chwalla) pero no tenemos informaciones de que el criterio sea seguido por ninguna norma.

Para el estado semidúctil y dúctil la carga crítica está dada, según K. Jezec, por las siguientes fórmulas (Ref. 9).

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{F_c} \left[1 - \frac{m F_c}{3 (F_f - F_c)} \right]^3 \quad \text{Form. 22}$$

$$\lambda^2 = \frac{\pi^2 E}{F_c} \sqrt{\frac{F_c}{F_f} \left(\frac{F_f}{F_c} - \frac{F_c}{F_f} - \frac{2m}{3} \right)^3} \quad \text{Form. 23}$$

III. COUDICIONES EXTREMAS

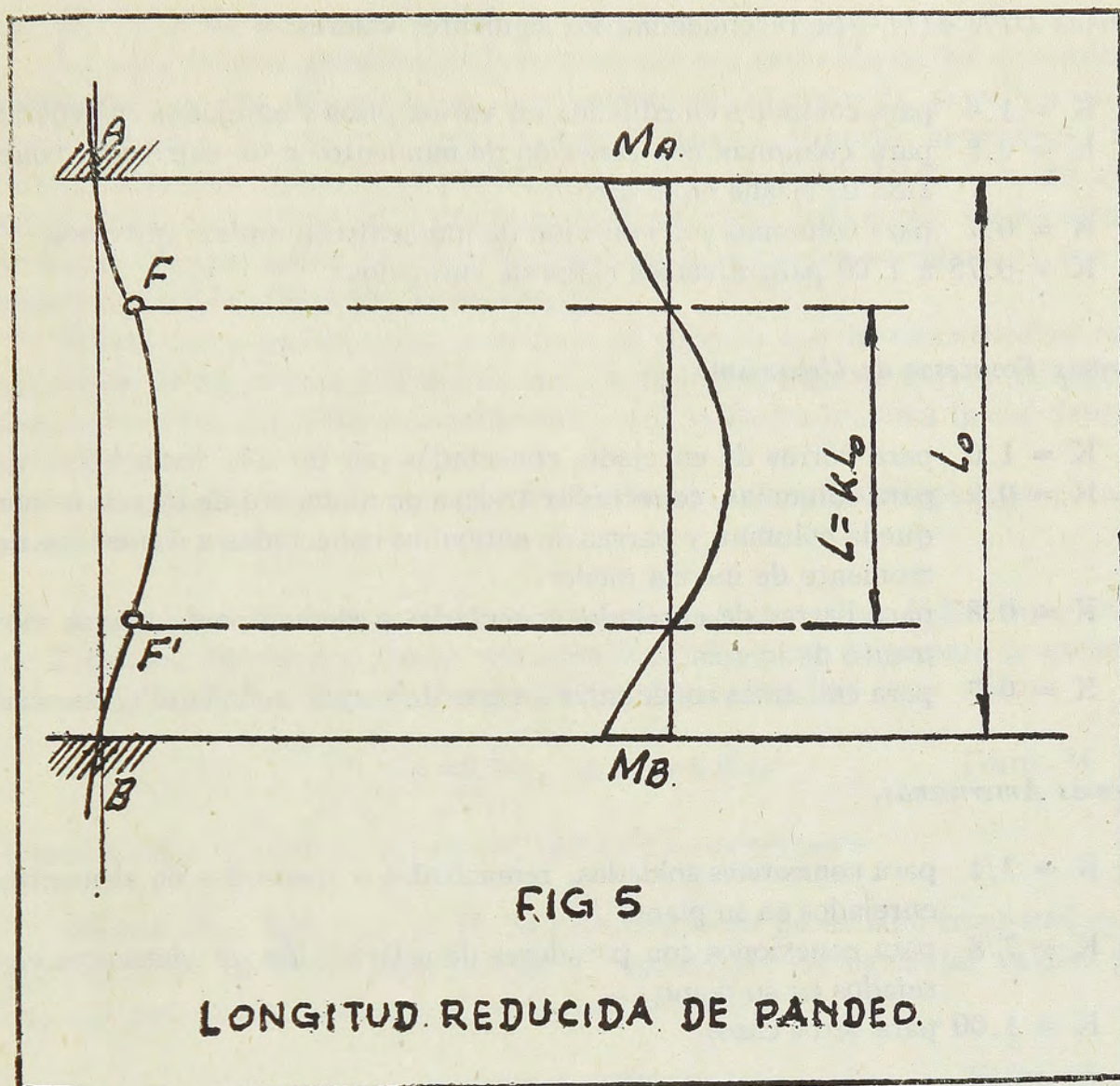
Todas las fórmulas anteriores se basan en columnas con los extremos perfectamente articulados. En la práctica nunca es posible obtener articulaciones ni empotramientos perfectos y las condiciones reales están entre estos dos límites.

El efecto de las condiciones de los extremos se toma en cuenta por medio del uso de factores de empotramiento o de longitudes reducidas de pandeo. Este último método es el seguido normalmente en diseño estructural.

En la figura 5 se representa una columna pandeada A B con ciertos grados de empotramiento en los extremos y el diagrama crítico de momentos de la misma. La longitud reducida es la distancia FF' entre los puntos de inflexión y el coeficiente de reducción «k» se define como la razón entre la longitud reducida y la total.

Para la columna ideal con carga centrada y condiciones teóricas de apoyo, se obtienen los siguientes valores de k:

Ambos extremos articulados y fijos en sentido lateral	K = 1.0
Ambos extremos empotrados y fijos en sentido lateral	K = 0.5
Un extremo empotrado y fijo, el otro libre	K = 2.0
Un extremo empotrado y fijo, el otro articulado y fijo	K = 0.7
Ambos extremos empotrados y libres en sentido lateral	K = 1.0



Para las columnas con carga inicial o con curvatura inicial las relaciones anteriores no son válidas. En efecto, k es función de los siguientes factores (Ref. 1, página 192).

- a) La condición de empotramiento. (Rigidez de la conexión y rigidez relativa de los elementos conectados.)
- b) La excentricidad inicial;
- c) La esbeltez;
- d) La calidad del acero; y
- e) La magnitud de la carga en un momento dado.

Lo anterior es evidente si se considera que « k » está dado por la posición de los puntos de inflexión, los que son función de los valores extremos M_a y M_b y de la forma del diagrama de momentos, o sea, de la elástica crítica.

La determinación de « k » es un problema todavía en las etapas preliminares de investigación. Existen soluciones teóricas para sistemas enrejados y de marco rígido (Ref. 11) en las que se aplican modificaciones del método de Cross; dichas soluciones han sido desarrolladas para columnas ideales y no toman en cuenta la rigidez de las conexiones.

Debido a la indeterminación de las variables y complejidad del problema, la mayoría de las especificaciones dan reglas aproximadas respecto del valor de « k ».

Normas DIN 4114—Se recomiendan los siguientes valores:

- $K = 1.0$ para columnas en edificios de varios pisos y enrejados en general.
- $K = 0.8$ para columnas con conexión de momento en un extremo y conexión de cizalle en el otro.
- $K = 0.7$ para columnas con conexión de momento en ambos extremos.
- $K = 0.75$ a 1.00 para diversos casos de enrejados.

Normas Francesas de Urbanismo.

- $K = 1.0$ para barras de enrejado, conectadas por un solo remache.
- $K = 0.9$ para columnas conectadas a vigas de momento de inercia menor que la columna y barras de enrejados conectadas a elementos de momento de inercia menor.
- $K = 0.8$ para barras de enrejado conectadas a elementos de mayor momento de inercia.
- $K = 0.7$ para columnas conectadas a vigas de mayor momento de inercia.

Normas Americanas.

- $K = 3/4$ para conexiones soldadas, remachadas o apernadas de elementos enrejados en su plano.
- $K = 7/8$ para conexiones con pasadores de articulación de elementos enrejados en su plano.
- $K = 1.00$ para otros casos.

Un examen de lo expuesto revela la diversidad de criterios y lo incompleto de los mismos en las diversas especificaciones.

Así, por ejemplo, las normas DIN y Americanas coinciden en definir « k » en función del tipo de conexión, sin considerar la rigidez de los otros elementos concurrentes. En las normas Francesas se hace intervenir el momento de inercia de los elementos concurrentes, lo que evidentemente no representa la rigidez, y no se considera la rigidez de la conexión, salvo en el caso de enrejados con un perno. En ninguna de las normas se incluyen la influencia de la esbeltez, magnitud de la carga, excentricidad inicial y otras variables enunciadas anteriormente.

El autor no tiene antecedentes respecto a los fundamentos teóricos o experimentales de los valores recomendados por las normas DIN y Francesas. Los valores de las normas Americanas tienen una buena base experimental y se considera que los resultados están siempre en el lado de la seguridad (Refs. 7 y 8).

IV. EXCENTRICIDAD INICIAL

S. Timoshenko (Ref. 1, pág. 186) clasifica las imperfecciones iniciales de una columna en tres categorías:

- a) Excentricidad de la carga.
- b) Curvatura inicial.

c) Falta de homogeneidad de la sección.

La falta de homogeneidad de la sección, sea por variación de las dimensiones transversales o por diferencias en la constitución del material, se refleja en un desplazamiento del centro de gravedad de la misma, y puede asimilarse a una curvatura inicial. Además, es posible reducir por medio de la fórmula 19 vista anteriormente, la curvatura a una excentricidad inicial de la carga. De lo anterior se desprende que todas las imperfecciones iniciales pueden asimilarse a una excentricidad en la aplicación de las cargas.

Existe cierta uniformidad de criterio en suponer que la excentricidad en la aplicación de las cargas y la debida a falta de homogeneidad son función de las dimensiones transversales de la columna y que la flecha máxima inicial depende de su longitud.

A continuación se da un resumen de diversas fórmulas propuestas para las variables anteriores:

Fórmulas de Martson y Jensen.—Basándose en un análisis de las experiencias de Tetmajer, Martson y Jensen recomiendan el siguiente valor para la excentricidad “ e_1 ,” debida a falta de homogeneidad de la columna:

$$e_1 = 0,06r_0 \quad \text{a} \quad e_1 = 0.07r_0 \quad \text{Fórm. 24}$$

siendo r_0 el radio del núcleo central definido anteriormente.

Fórmulas de Salmon.—E. H. Salmon, haciendo un estudio comparativo de gran cantidad de datos experimentales, recomienda los siguientes valores para “ e_1 ,” y para la flecha inicial “ y_0 ” respectivamente:

$$e_1 = 0.0001 \quad l \quad \text{Fórm. 25}$$

$$y_0 = 0.00133 \quad l \quad \text{Fórm. 26}$$

Si llamamos e_2 la excentricidad inicial equivalente a la curvatura y se aplica la fórmula 19, se tiene:

$$e_2 = 0.00104 \quad l \quad \text{Fórm. 27}$$

Fórmulas de Kayser y Timoshenko.—H. Kayser, a base de estudios experimentales, recomienda para la flecha inicial total Y_0 y para la excentricidad total “ e_1 ,” tomando en cuenta todas las causas posibles de imperfección, los valores:

$$Y_0 = 0.001 \quad \text{a} \quad 0.0025 \quad l \quad \text{Fórm. 28}$$

$$e = 0.00078 \quad \text{a} \quad 0.00196 \quad l$$

El valor de “ e ” se ha obtenido por aplicación de la fórmula 19.

S. Timoshenko recomienda el uso del mayor de los valores anteriores.

Fórmula de Jasinsky.—F. S. Jasinsky propone para Y_0 y e respectivamente los valores:

$$Y_0 = 0,1 r_0 + 0.00133 \quad l \quad \text{Fórm. 29}$$

$$e = 0.079 r_0 + 0.00104 \quad l \quad \text{Fórm. 30}$$

(Todas las expresiones anteriores han sido tomadas de Theory of Elastic Stability, S. Timoshenko, págs. 186-192, Ref. 1).

Fórmula de Balog (Ref. 9).—L. Balog, haciendo un estudio crítico de las especificaciones norteamericanas propone la expresión:

$$e = 0.25 r_o \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{Fórm. 31}$$

Normas DIN 4114.—Las normas DIN 4114 adoptan para «e» la expresión:

$$e = 0.05r + 0.002 l \quad \text{Fórm. 32}$$

Donde r es el radio mínimo de giro.

Aparentemente no existe base experimental para la expresión anterior. En efecto, en Stahlbau Handbuch, edición de 1952 (Ref. 4, pág. 613), se afirma que la variación anterior de «e» en función de «y» ha sido supuesta en forma arbitraria. Creemos, sin embargo, que el valor de «e» se ha elegido para obtener buena coincidencia con las antiguas normas DIN 1050 que se consideran sancionadas por la práctica.

Normas Francesas de Urbanismo.— Las normas francesas de urbanismos suponen una curvatura inicial dada por la expresión 16, en que la constante «C» tiene el valor experimental 1/2,4. Lo anterior lleva a la siguiente expresión para «e»:

$$e = 0.033 \frac{F_f}{E} \frac{L^2}{v} \quad \text{Form. 33}$$

Que para acero normal chileno A 42 ($F_f = 2300 \text{ Kg/cm}^2$, $E = 2.100.000 \text{ Kg/cm}^2$) se reduce a:

$$e = 0.365 r_o \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{Form. 34}$$

El parámetro v, como se vió anteriormente, es la distancia entre el eje neutro y la fibra más alejada.

Normas americanas.—Las normas americanas, a base de numerosas experiencias efectuadas por la American Society of Civil Engineers (Ref. 6, 7 y 8) recomiendan el valor

$$e = 0.25 r_o \quad \text{Form. 35}$$

En las investigaciones americanas se establece una expresión que «e» es función de r_o y de la longitud, de acuerdo con la expresión:

$$\frac{e}{r_o} = 0.1 + 0.001 \lambda \quad \text{Form. 36}$$

Sin embargo, se llega a la conclusión de que las fatigas dadas por dicha expresión en la fórmula de la secante, difieren muy poco de las obtenidas con la fórmula 35.

Comparación de fórmulas de excentricidad.

Con el objeto de comparar las diversas expresiones anteriores, se han transformado en la siguiente forma (explicada en detalle para la expresión de Jasinsky. Fórmula 30):

$$\frac{e}{r_0} = 0,079 + 0,00104 \frac{L}{r} \frac{r}{r_0}$$

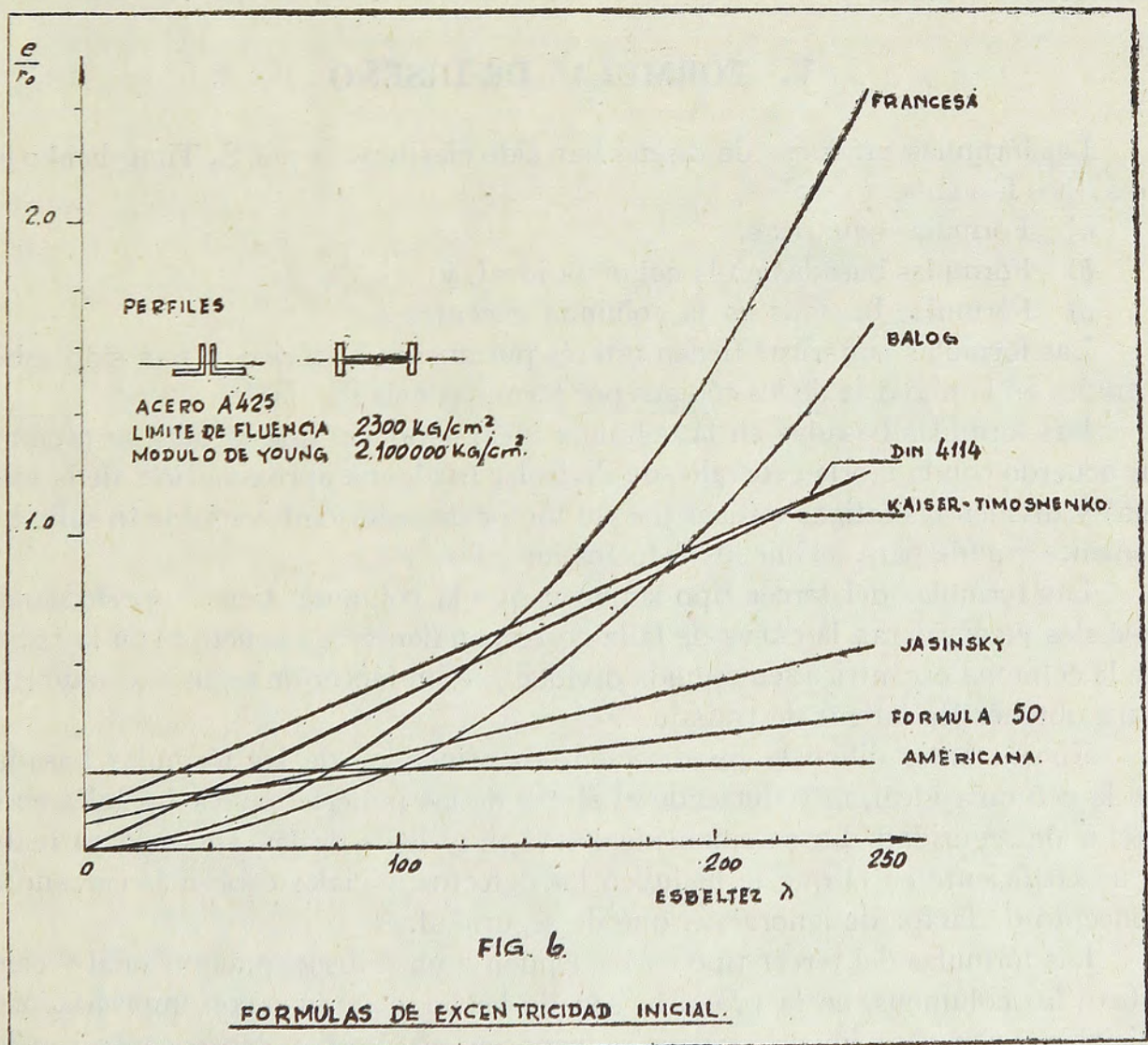
$$\frac{r}{r_0} = \frac{v}{r}$$

Luego:

$$\text{Fórmula de Jasinsky: } \frac{e}{r_0} = 0,079 + 0,104 \frac{\lambda}{100} \frac{v}{r} \quad \text{Fórm. 37}$$

Simultáneamente se obtiene:

$$\text{Fórmula de Balog: } \frac{e}{r_0} = 0,25 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{Form. 38}$$



Fórmula DIN 4114:
$$\frac{e}{r_o} = (0,05 + 0,2 \frac{\lambda}{100}) \frac{v}{r} \quad \text{Form. 39}$$

Fórmula Francesa:
$$\frac{e}{r_o} = 0,365 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad (\text{Acero 42 S.}) \quad \text{Form. 40}$$

Fórmula Americana:
$$\frac{e}{r_o} = 0,25 \quad \text{Form. 41}$$

Fórmula Kayser-Timoshenko:
$$\frac{e}{r_o} = 0,196 \frac{\lambda}{100} \frac{v}{r} (\text{Val. crít.}) \quad \text{Form. 42}$$

En la figura 6 se han representado las fórmulas anteriores para un valor $\frac{v}{r} = 2,32$ aplicable a dos ángulos espalda a espalda o a un perfil H en el sentido del eje más débil, correspondientes a los casos más desfavorables que se encuentran en la práctica corriente y que ha sido adoptado por las normas DIN 4114 en su deducción (las normas DIN dan el valor 2.317).

En el gráfico de la figura 6 se puede apreciar que existe gran diversidad de criterios en la apreciación de las imperfecciones iniciales entre las diversas autoridades citadas.

V. FORMULAS DE DISEÑO

Las fórmulas prácticas de diseño han sido clasificadas por S. Timoshenko en tres tipos fundamentales:

- a) Fórmulas empíricas;
- b) Fórmulas basadas en la columna ideal, y
- c) Fórmulas basadas en la columna excéntrica.

Las fórmulas empíricas tienen interés puramente histórico y han sido substituídas en la mayoría de los códigos por fórmulas más racionales.

Las fórmulas basadas en la columna ideal suponen que la falla se produce de acuerdo con la teoría generalizada de Euler (o alguna aproximación de la misma) y dividen las fatigas críticas por un factor de seguridad variable lo suficientemente grande para incluir los defectos iniciales.

Las fórmulas del tercer tipo suponen que la columna tiene imperfecciones iniciales y consideran la curva de falla correspondiente, de acuerdo con la teoría de la columna excéntrica; en seguida dividen por un factor de seguridad uniforme para obtener las fatigas de trabajo.

Encontramos difícil la justificación, en principio, de las fórmulas basadas en la columna ideal, introduciendo el efecto de las imperfecciones iniciales en el factor de seguridad. La columna ideal está muy lejos de las condiciones reales y un coeficiente en el que se incluyen los defectos iniciales está más cercano al concepto de factor de ignorancia que de seguridad.

Las fórmulas del tercer tipo corresponden a un criterio más racional y científico; las columnas, en la práctica, son de hecho columnas con imperfecciones iniciales y si dichas imperfecciones se conocen, es lógico y consecuente con los

conceptos generales de estabilidad y resistencia de materiales, aplicar un coeficiente de seguridad constante.

Pasaremos revista a continuación a algunas de las normas de pandeo.

Norma DIN 1050.—La antigua norma DIN 1050 toma como base de falla la columna ideal, reemplazando la curva de Engesser - Von Kármán, en la zona de esbelteces bajas, por un sistema de dos rectas. El factor de seguridad varía entre 1.71 para $\lambda = 0$ hasta 3.5 para $\lambda = 100$ y es constante e igual a 3.5 para valores mayores de 100 (Ref. 12).

Norma DIN 4114.—La norma DIN 4114 es una norma de transición entre el criterio basado en la columna ideal y el criterio basado en la columna excéntrica. Considera que el material puede fallar de acuerdo a la teoría generalizada de Euler, y aplica un factor de seguridad de 2.5 para cargas principales y de 2.19 para cargas transitorias.

Se supone en seguida que la falla puede producirse de acuerdo a la fórmula 15 para columna excéntrica, con una excentricidad dada por la expresión 32 y que los perfiles son dos ángulos espalda a espalda. A dicha curva de falla se aplican coeficientes de seguridad de 1.5 para cargas principales y 1.3 para cargas transitorias.

Las fatigas finales de seguridad son las menores dadas por algunos de los procedimientos anteriores.

La primera teoría gobierna en el acero normal ST 37 para valores de λ entre 0 y 115 y la segunda para valores mayores que 115 (Ref. 4, pág. 615).

Normas Francesas de Urbanismo 1946.—Las normas francesas de urbanismo están basadas en la columna excéntrica; la fórmula de falla está dada por las fórmulas 14 y 21, y la excentricidad inicial por las fórmulas 16, 33 y 34. El coeficiente de seguridad adoptado es 1.67 para cargas principales.

Normas Americanas.—La mayoría de las normas americanas están basadas en las investigaciones del Comité Especial de la Sociedad Americana de Ingenieros Civiles (Refs 6, 7 y 8).

Las investigaciones se desarrollaron durante un período de diez años (1923-1933), durante el cual se hizo un estudio detenido de los resultados de investigaciones anteriores y se ensayó un considerable número de columnas con el objeto de investigar la validez teórica de las fórmulas y obtener informaciones respecto a imperfecciones iniciales y condiciones de empotramiento.

Las conclusiones del informe del Comité han sido dadas en diversas partes de este trabajo y pueden resumirse como sigue:

a) Hay suficiente base experimental para aceptar la validez de la fórmula de la secante (Fórm. 9).

b) Se recomienda adoptar una excentricidad equivalente igual a 0.25 veces el radio del núcleo central (Fórm. 35).

c) Se recomienda tomar coeficientes de reducción de $3/4$ para extremos soldados, remachados o apernados y $7/8$ para conexiones rotuladas.

Si el factor de seguridad es S , la fatiga admisible F queda dada por la expresión:

$$F = \frac{F_f / S}{1 + 0,25 \sec \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{s F}{E}}} \quad \text{Form. 43}$$

En la mayoría de las especificaciones es costumbre substituir la curva de la ecuación 43 por una fórmula más sencilla, del tipo parabólico o de Rankine, elegida en tal forma que las diferencias entre ambas curvas sean despreciables. Así, por ejemplo, las especificaciones AREA de Ferrocarriles y AASHO de Caminos (Refs. 13 y 14) adoptan la fórmula de la secante con factores de seguridad de 1.76 para cargas principales y 1.41 para cargas transitorias.

Las fórmulas aproximadas de diseño que se recomiendan, para cargas principales y acero normal son, en unidades métricas:

$$\text{Uniones remachadas (K = } \frac{3}{4} \text{)} \quad F = 1055 - 176 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \text{ Kg./cm}^2 \quad \text{Form. 44}$$

$$\text{Uniones rotuladas (K = } \frac{7}{8} \text{)} \quad F = 1055 - 235 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \text{ Kg./cm}^2 \quad \text{Form. 45}$$

Las normas AISC para edificios (Ref. 15) siguen el mismo criterio para esbelteces entre 0 y 120; los factores de seguridad adoptados son 1.55 y 1.17 respectivamente, y el coeficiente K se toma igual a 1.00. Para esbelteces mayores el coeficiente de seguridad es variable y distinto según se trata de elementos principales o secundarios. Los valores límites para $\lambda = 200$ son 2.0 y 1.3 para cargas principales y 1.5 y 1.0 para cargas secundarias. Las fórmulas son las siguientes (AISC. Specifications, Sect. 15 a.) en unidades métricas:

$$\text{Esbeltez hasta 120} \quad F = 1200 - 341 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \quad \text{Form. 46}$$

$$\text{Esbeltez sobre 120} \quad F = \frac{1270}{1 + \left(\frac{\lambda}{134} \right)^2} \quad \text{Miembros principales} \quad \text{Form. 47}$$

$$F = \frac{1270}{1 + \left(\frac{\lambda}{134} \right)^2} \left(1,6 - \frac{\lambda}{200} \right) \quad \text{Miembros secundarios} \quad \text{Form. 48}$$

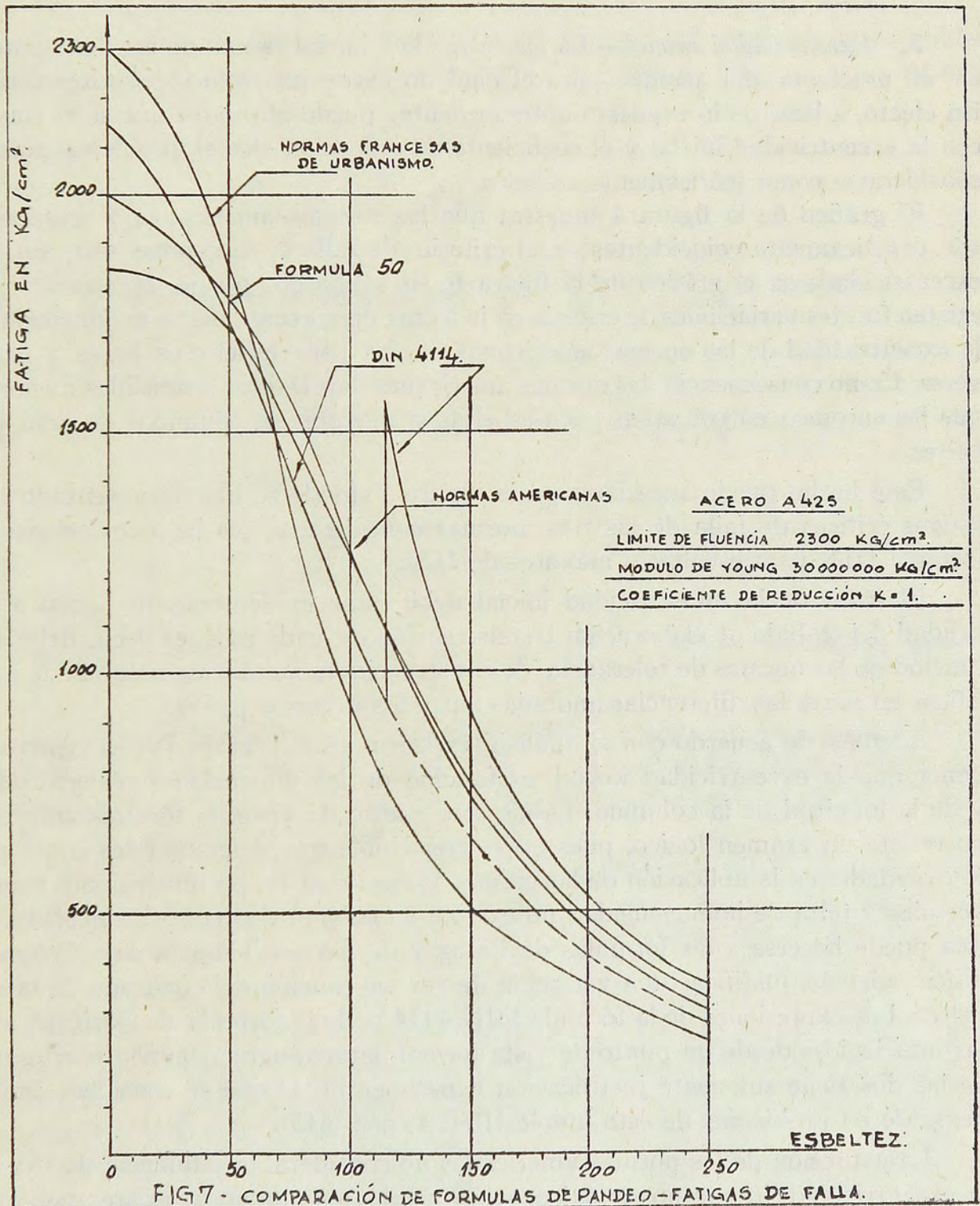
Los coeficientes de seguridad adoptados, con la excepción de las normas francesas, son consistentemente menores que para elementos en tracción, por cuanto se considera que la inclusión de imperfecciones del material (que también existen en tracción) en el valor de la excentricidad inicial justifica dicha reducción.

VI ESTUDIO COMPARATIVO Y RECOMENDACIONES PARA LA ADOPCION DE UNA FORMULA DE PANDEO

Un estudio comparativo de las especificaciones citadas debe considerar tanto el aspecto racional como la economía de las fórmulas.

En la figura 7 se representan las curvas de fatiga crítica según las normas DIN 4114 Francesas de Urbanismo, Americanas (ASCE) y una expresión propuesta más adelante (Fórm. 50).

1. *Criterio de falla.*—Las tres normas toman como criterio de falla el punto en que la fibra más solicitada alcanza el límite de fluencia, para una columna excéntrica. Las normas DIN 4114 agregan, además, un criterio adicional basado en la columna ideal. Por las razones dadas más arriba se estima que el primer criterio corresponde a una solución más racional del problema.



En cuanto a las fórmulas de falla, en el párrafo II se demostró que las tres normas llegan a conclusiones prácticamente equivalentes, y que las diferencias

se deben únicamente a hipótesis secundaria en cuanto a la forma de la elástica inicial (Fig. 4).

La fórmula francesa es la más sencilla, pero da valores en defecto y es la de menor aproximación respecto a la teoría.

La fórmula DIN es más aproximada que la anterior, pero su solución es difícil, pues cada punto hace necesario resolver ecuaciones de tercer grado (fórmula 12). La fórmula de la secante de las normas americanas, tiene la doble ventaja de corresponder a una integración exacta de las ecuaciones diferenciales y de ser de cálculo relativamente sencillo por medio del uso de tablas trigonométricas (Fórm. 17).

2. *Excentricidad inicial.*—La excentricidad inicial es uno de los dos puntos en el problema del pandeo para el cual no existe una solución satisfactoria. En efecto, a base de lo expuesto anteriormente, puede afirmarse que si se conocen la excentricidad inicial y el coeficiente de reducción «k» el problema puede considerarse como teóricamente resuelto.

El gráfico de la figura 4 muestra que las normas americanas y europeas son prácticamente coincidentes en el criterio de falla si se supone una misma excentricidad; en el gráfico de la figura 6, sin embargo, puede apreciarse que existen fuertes variaciones de criterio en la forma de apreciar dicha excentricidad; la excentricidad de las normas americanas es alta para esbelteces bajas y viceversa. Como consecuencia, las normas americanas dan fatigas admisibles menores que las europeas en columnas poco esbeltas y mayores en columnas de gran esbeltez.

Este hecho puede apreciarse en la figura 7 donde se han representado las fatigas críticas de falla de las tres normas consideradas (se ha extrapolado la fórmula DIN para esbelteces mayores de 115).

El valor de la excentricidad inicial debe estar evidentemente ligado a la calidad del trabajo de elaboración y construcción de cada país; es decir, debe ser función de las normas de tolerancia de construcciones metálicas. Esto puede justificar en parte las diferencias anotadas entre los diversos países.

Además, de acuerdo con el análisis expuesto en el párrafo IV, es lógico suponer que la excentricidad inicial es función de las dimensiones transversales y de la longitud de la columna. Desde este punto de vista, la fórmula francesa no resiste un examen lógico, pues no es concebible que defectos tales como excentricidades en la aplicación de las cargas, variaciones de las dimensiones transversales y falta de homogeneidad no existan en columnas cortas. La misma crítica puede hacerse a las fórmulas de Balog y de Kayser-Timoshenko. Creemos difícil, además, justificar una variación de «e» en función del cuadrado de la esbeltez. Las expresiones de la fórmula DIN 4114 y de la fórmula de Jasinsky son las más lógicas desde un punto de vista formal pero, desgraciadamente, ninguna de las dos tiene suficiente justificación experimental, lo que se considera indispensable en problemas de esta índole (Ref. 4, pág. 613).

La expresión de las normas americanas no considera la influencia de «λ» en la excentricidad, lo que no es lógico, en principio; sin embargo, existe aparentemente una sólida base experimental.

Creemos evidente que la adopción de un criterio definido de excentricidad en países como el nuestro debe, en último término, basarse en experiencias en

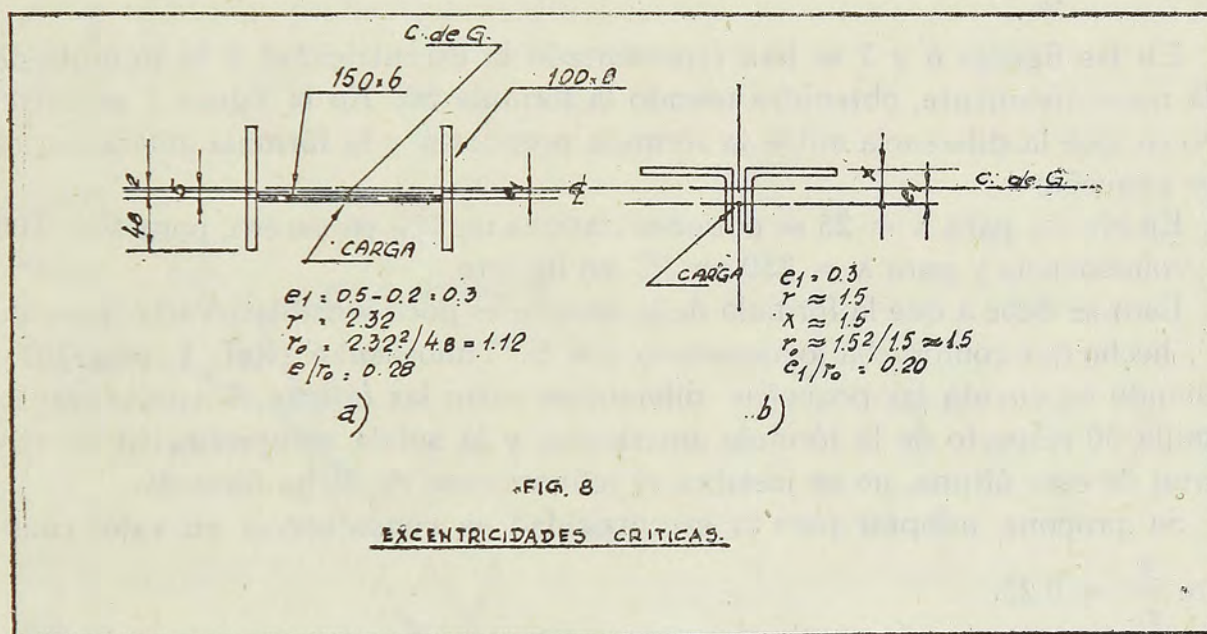
columnas elaboradas de acuerdo con nuestras prácticas constructivas y normas de tolerancia.

Sin embargo, para la adopción de normas provisionales se sugiere el siguiente análisis:

a) *Excentricidad debida a la carga y variaciones en la sección transversal.*

Consideraremos dos casos críticos de una sección H y una sección $\gamma\gamma$ pandeada en el sentido del eje menor (Fig. 8). En el primer caso se supondrá que la carga está aplicada en el centro del perfil, y en el segundo, a una distancia de 3 mm. del centro de gravedad. Se sugiere la distancia de 3 mm. como la tolerancia máxima admisible en las dimensiones (coincidencia de agujeros, etc.).

Se supondrá, además, que la sección tiene las mayores variaciones aceptables de acuerdo con las normas DIN o AISC (Ref. 16, pág. 16; Ref. 15, págs. 63-67).



El perfil de la figura 8a corresponde a una sección normal chilena CAP de 150 mm. de altura y 20 Kg/m. (15 H 20), y el segundo a ángulos de 50 mm. que son probablemente los perfiles más pequeños usados en columnas. El valor crítico para el caso más desfavorable es $e_1/r_0 = 0.28$.

Otras excentricidades, tales como las debidas a diferencia entre la línea de gramil y centro de gravedad en ángulos, son previsibles y deben hacerse intervenir en el cálculo.

b) *Excentricidad por curvatura inicial.*

La flecha máxima inicial aceptable según normas americanas es 1/1000 de la luz (AISC Specifications, 1946, Section 33 q.). Las normas DIN 1612 dan tolerancias de laminación de 1/667 para perfiles de menos de 400 mm. de altura y de 1/1000 para perfiles mayores, lo que hace presumir que la tolerancia para columnas elaboradas es, por lo menos, igual a la de las normas americanas.

La flecha anterior corresponde a la columna elaborada en el taller y la erección. Es lógico suponer deformaciones adicionales durante el transporte, por lo que se sugiere el valor 1/500.

c) *Excentricidad por falta de homogeneidad del material.*

La influencia de la falta de homogeneidad es prácticamente imposible de apreciar; sin embargo, los métodos y los estrictos controles metalúrgicos seguidos en la práctica moderna de laminación, hacen presumir que el efecto de heterogeneidad sea pequeño. Supondremos que este efecto está incluido en el punto a.

Las probabilidades de que todos los defectos anteriores existan simultáneamente con sus valores máximos son muy pequeñas. Adoptando para las condiciones medias un 50% de la suma de los valores máximos se obtiene:

$$\frac{e}{r_o} = \frac{1}{2} \left(0,28 + \frac{\pi \lambda}{4 \cdot 500} \right) = 0,14 + 0,00078\lambda \quad \text{Form. 49}$$

Se propone usar la expresión:

$$\frac{e}{r_o} = 0,15 + 0,001\lambda \quad \text{Form. 50}$$

En las figuras 6 y 7 se han representado la excentricidad y la fórmula de falla respectivamente, obtenidas usando la fórmula 50. En la figura 7 se puede apreciar que la diferencia entre la fórmula propuesta y la fórmula americana es muy pequeña.

En efecto, para $\lambda = 25$ se obtienen fatigas un 7% en exceso, para $\lambda = 100$ hay coincidencia y para $\lambda = 250$ un 3% en defecto.

Esto se debe a que la fórmula de la secante es poco sensible a variaciones de "a", hecho que comprueba lo aseverado por S. Timoshenko (Ref. 1, pág. 191). Tomando en cuenta las pequeñas diferencias entre las fatigas obtenidas con la fórmula 50 respecto de la fórmula americana, y la sólida comprobación experimental de esta última, no se justifica el refinamiento de dicha fórmula.

Se propone adoptar para la excentricidad en consecuencia un valor constante $\frac{e}{r_o} = 0.25$.

3. *Factor de seguridad.* A continuación se da un cuadro comparativo de los factores de seguridad usados en las tres normas consideradas:

	CARGAS NORMALES	CARGAS TRANSITORIAS
DIN 4114.—(λ entre 0 y 115).	1.5	1.3
Normas francesas.	1.67	—
AISC (λ entre 0 y 120).	1.55	1.17

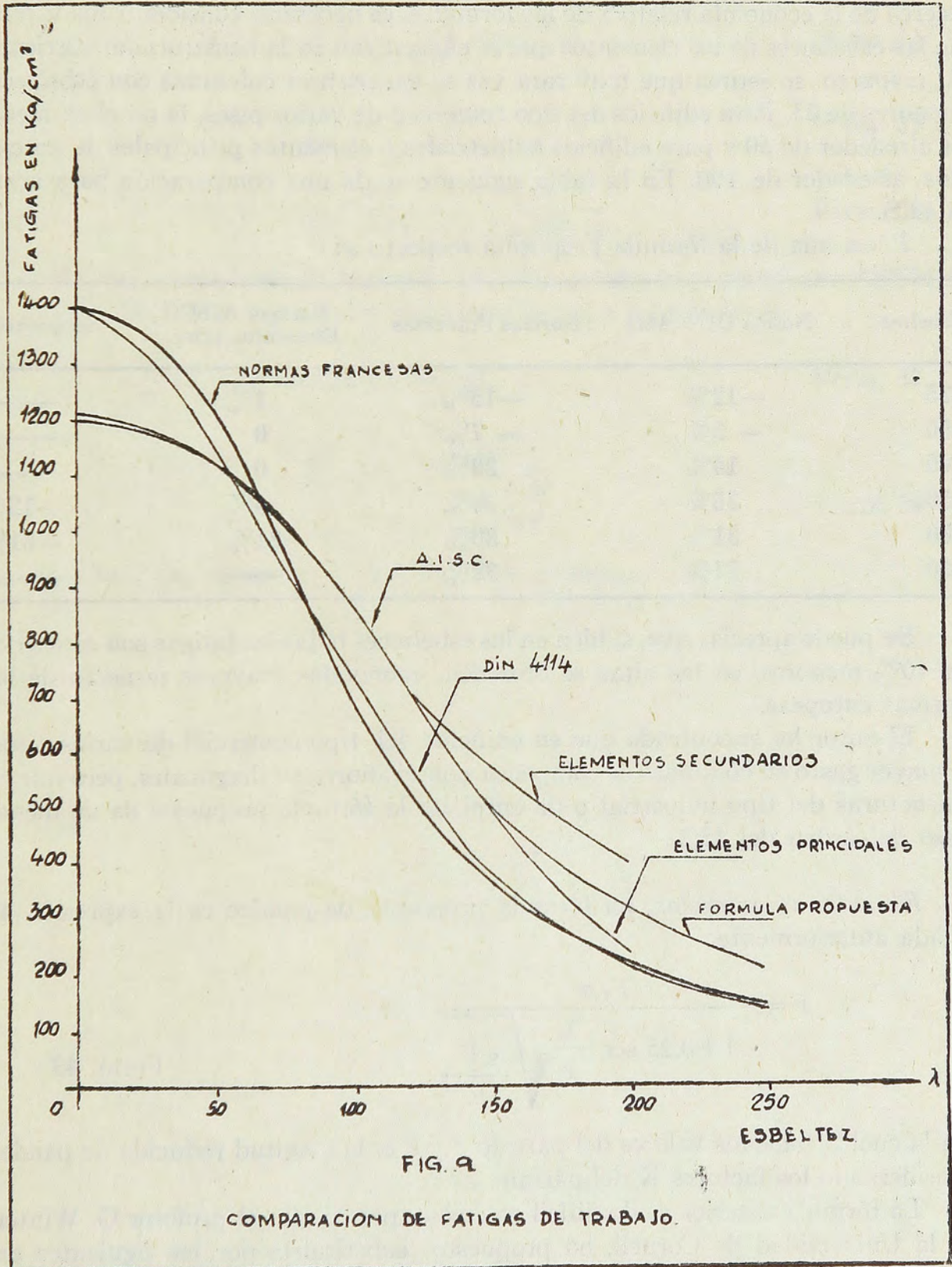
No creemos lógico adoptar, siguiendo las normas francesas, un factor de seguridad para pandeo igual que para tracción. Tampoco nos parece que el criterio de factores variables seguido por las normas americanas AISC para esbelteces mayores que 120 se pueda justificar racionalmente. Se propone, en consecuencia, adoptar un valor aproximadamente igual a 1.53 para el caso de cargas principales.

En cuanto a cargas transitorias, puede observarse que las normas DIN permiten un aumento de 15% en las fatigas y las norteamericanas 33%.

Siguiendo el criterio lógico de dar igual importancia a la experiencia en construcciones metálicas de los EE. UU. y Alemania, es económicamente ventajoso adoptar factores similares a los propuestos por el AISC.

4. *Longitud de pandeo* Comparando las diversas especificaciones citadas anteriormente, puede deducirse que para barras con conexiones remachadas, soldadas o apernadas corrientes, en las cuales no existe posibilidad de desplazamiento lateral de los extremos, el coeficiente «k» varía entre 0.7 y 0.8. Si existe posibilidad de desplazamiento el coeficiente «k» debe ser uno, aun para empostramiento perfecto. Se propone, en consecuencia, adoptar los siguientes valores:

Barras con conexiones soldadas, apernadas o remachadas, en que no existe posibilidad de desplazamiento lateral de los extremos (p. ej., sistemas enrejados en su propio plano): $K = 3/4$.



Id. con conexiones rotuladas: $K = 7/8$.

Barras en que existe posibilidad de desplazamiento lateral de los extremos (p. ej., columnas de sistemas de marco rígido): $K = 1$.

Barras con un extremo libre: $K = 2$.

5. *Economía*.—En la figura 9 se muestran las fatigas de trabajo para las especificaciones DIN 4114, fórmula Francesa de Urbanismo, normas AISC y la especificación propuesta.

Se puede observar que las fórmulas europeas aceptan fatigas mayores que la AISC y la propuesta para esbelteces bajas y viceversa. Para formarse un criterio acerca de la economía relativa de las fórmulas, es necesario considerar los valores de las esbelteces de los elementos que se encuentran en la construcción corriente. Al respecto, se estima que muy rara vez se encuentran columnas con esbelteces menores de 25. Para edificios del tipo comercial de varios pisos, la esbeltez media es alrededor de 50 y para edificios industriales y elementos principales de enrejados, alrededor de 100. En la tabla siguiente se da una comparación para acero A 42 S.

Economía de la fórmula propuesta respecto a:

Esbeltez	Norma DIN. 4414	Normas Francesas	Normas AISC. Elementos princ.	Secundarios
25	—12%	—15%	1%	—
50	— 3%	— 7%	0	—
100	14%	20%	0	—
150	25%	28%	4%	—13%
200	31%	30%	21%	—31%
250	34%	32%	—	—

Se puede apreciar que, si bien en las esbelteces bajas las fatigas son alrededor de 10% menores, en las altas se obtienen economías mayores respecto de las normas europeas.

El autor ha encontrado que en edificios del tipo comercial de varios pisos, el mayor gasto en columnas se compensa con el ahorro en diagonales, pero que en estructuras del tipo industrial o de enrejado la fórmula propuesta da un menor peso del orden del 15%.

6. *Fórmulas aproximadas*. La fórmula propuesta de pandeo es la expresión 43 citada anteriormente.

$$F = \frac{F_f/s}{1 + 0,25 \sec \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{s F}{E}}} \quad \text{Form. 43}$$

En la cual S tiene los valores del párrafo 3 y λ es la longitud reducida de pandeo considerando los factores K del párrafo 4.

La fórmula anterior es de difícil solución, por lo que el profesor G. Winter, de la Universidad de Cornell, ha propuesto sustituirla por las siguientes expresiones aproximadas que dan diferencias no mayores del 1% (Ref. 9).

$$\text{Para } \lambda \text{ entre } 0 \text{ y } \lambda_1 \quad F = \frac{F_f}{n} - \frac{F_f^2}{4n\pi^2 E} \lambda^2 \quad \text{Form. 51}$$

$$\text{Para } \lambda \text{ mayor que } \lambda_1 \quad F = \frac{A}{1+B\lambda^2} \quad \text{Form. 52}$$

Donde los parámetros tienen los valores siguientes:

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{2 E}{F_f}} \quad \text{Form. 53}$$

$$n = s \left(1 + \frac{e}{r_o} \right) = s(1+a) \quad \text{Form. 54}$$

$$A = \frac{F_f}{2n} + B \frac{\pi^2 E}{n} \quad \text{Form. 55}$$

$$B = \frac{1}{2} \frac{F_f}{\pi^2 E a} - \frac{n}{250.000 sa} \quad \text{Form. 56}$$

Para el acero normal chileno A 42 S. (equivalente al americano ASTM-A7 y al DIN-St.37) las expresiones anteriores llevan a las relaciones:

$$\lambda \leq 135 \quad F = 1200 - \frac{1}{30} \lambda^2 \quad \text{Form. 57}$$

$$\lambda > 135 \quad F = \frac{2780}{1 + \left(\frac{\lambda}{70} \right)^2} \quad \text{Form. 58}$$

La sencillez de las fórmulas 57 y 58 es evidente.

BIBLIOGRAFIA

- 1.—*Theory of Elastic Stability*. S. TIMOSHENKO. Mc. Graw Hill, 1936.
- 2.—*Theory of Limit Design*. J. A. VAN DEN BROCK. John Wiley & Sons, 1948.
- 3.—*Applied Column Theory*. F. R. SHANLEY. Transactions ASCE 1950. Paper 2410.
- 4.—*Stahlbau Handbuch*, Deutschen Stahlbau Verband. Walter Dorn GMBH. 1952.
- 5.—*Elements de construction*. G. LEMASSON-A. L. TOURANCHEAN. Tome VII. Dunod, 1950.
- 6.—A. S. C. E. Special Committee on Steel Column Research. First progress report. Transactions ASCE 1926, paper 1597.
- 7.—A. S. C. E. Special Committee on Steel Column Research; Second progress report. Transactions ASCE 1927, Paper 1789.
- 8.—A. S. C. E. Special Committee on Steel Column Research. Final progress report. Transactions 1933, Paper 1856.
- 9.—*Column Formulas*. W. R. OSGOOD. Transactions ASCE 1946, Paper 2269.
- 10.—*Elasticity*. A. NADAI. Mc Graw Hill, 1931.
- 11.—*End Restraints on truss members*. H. E. Wessman, T. C. Kavanagh, 1950. Transactions ASCE, Paper 2419.
- 12.—*Stahlbau Handbuch*, Deutschen Stahlbau Verband. Walter Dorn GMBH, 1948.
- 13.—*Structural Design in Steel*. T. C. SHEDD. J. Wiley & Sons. 1947.
- 14.—*Standard Specifications for Highway Bridges*, American Association of State Highway Officials, 1949.
- 15.—*Manuel of the American Institute of Steel Construction*. 1947.
- 16.—*Stahl Im Hochbau*. Verein Deutscher Eisenhüttenleute, Verlag Stahleisen, 1949.