Cálculo de losas cruzadas continuas

1.ª Parte

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural por el Ingeniero Alex Tripolsky.

INTRODUCCION

Los métodos de cálculo que se emplean en la determinación de las solicitaciones de placas isótropas continuas que representan, junto con las vigas, los elementos más frecuentes en las estructuras de hormigón armado, están mucho menos desarrollados que los métodos aplicados al estudio de estas últimas.

En el cálculo práctico de las losas cruzadas, a consecuencia de la dificultad y longitud de los desarrollos matemáticos, el estudio de las solicitaciones y tensiones se ha limitado a los casos de condiciones de apoyo definidas tales como empotramiento y libre giro. Un ejemplo de ello son las tablas para cálculo de losas cruzadas del profesor Pucher [1].

En este sentido es imprescindible lograr una mayor simplificación que permita hacer el análisis de losas cruzadas en condiciones sino iguales, por lo menos parecidas a las que rigen el análisis de vigas y estructuras continuas o aporticadas cuya solución se halla hoy día estudiada y sistematizada en tal forma que le es relativamente fácil abordar estos problemas a quien haya profundizado un poco en los detalles del cálculo de estructuras sin que ello constituya una pesada labor.

En la práctica, al estudiar los sistemas de losas continuas no se encuentra ni apoyos totalmente libres ni apoyos totalmente empotrados sino estados intermedios de empotramiento elástico. Para la valuación de estos grados de empotramiento es necesario en todo caso un análisis del conjunto de elementos adyacentes formados por losas y vigas.

Un cálculo exacto de losas cruzadas continuas se deberá basar en todo caso en la condición de igualidad de los ángulos de borde de las superficies deformadas de dos losas contiguas. En todo caso un cálculo exacto de una sección de losas continuas basado en una solución exacta o aproximada de las ecuaciones diferenciales de las placas permitirá, en los pocos casos en que ello es posible por lo simple, formarse una idea del grado de exactitud que en determinados casos podrá lograrse con métodos aproximados, sirviendo así para juzgar éstos últimos.

Uno de los trabajos más fundamentales y sobresalientes en este sentido lo debemos al profesor Marcus [2], quien en su libro sobre placas y en diversas otras

publicaciones ha profundizado notablemente los conocimientos sobre el problema.

En su obra ha planteado la solución de las placas mediante el empleo de las diferencias finitas como un medio de resolver las ecuaciones diferenciales.

Además de la exposición teórica de su método se dan varios ejemplos prácticos de cálculo, entre los cuales los más valiosos para el estudio de losas continuas son los que analizan los casos de 3 y 9 losas cuadradas continuas bajo la acción de cargas uniformemente repartidas (se consideran los apoyos como cuchillos ideales que permiten un giro libre sin descenso).

Como resumen de sus estudios el profesor doctor Marcus propuso un método aproximado [3] de cálculo substituyendo las losas por dos grupos de vigas cruzadas ortogonales y determinando la proporción de carga que éstas tomaban en la parte central de la placa en función de los inversos de las flechas.

De allí vino como ampliación de este método, el método dado por el profesor Lösser [4] de aplicación prácticamente general en los casos de placas cruzadas regulares extrapolándose a veces, como se verá más adelante, con bastante ligereza respecto de los límites que a ese método se le debe asignar.

Es así como su aplicación preconizada sólo para luces iguales y forma rectangular aproximadamente cuadrada se ha usado con frecuencia para resolver casos de forma bastante alejada de la cuadrada y con luces, cargas y espesores variables, en forma notable, de un paño a otro.

Es por esto que los ingenieros que cuidan de la exactitud de sus proyectos han sentido desde hace ya tiempo la necesidad imprescindible de un método de cálculo, más ajustado a la realidad, que les permita calcular, con un razonable grado de precisión y sin el empleo de un tiempo excesivo, cualquier sistema de placas rectangulares continuas bajo la acción de cualquier carga.

Según los antecedentes que obran en poder de quien escribe estas líneas uno de los primeros intentos de cálculo aproximado en el caso general de empotramiento de borde elástico se debe al profesor Bleich [5], quien en un artículo de la revista "Beton und Eisen" proponía tratar este problema como un problema hiperestático adoptando como incógnitas los momentos en los apoyos.

En el planteamiento del problema, Bleich considera sólo la acción de las cuatro losas contiguas a los cuatro lados de la losa estudiada suponiendo además que los apoyos opuestos a los continuos se encuentran en condición de simple apoyo, esto es, de libre giro.

En esta forma, cortando el vínculo de apoyo en cada costado de la losa considerada, calculando su deformación angular de borde para el estado de simple apoyo se puede determinar el momento que es necesario aplicar para restablecer en el sistema la continuidad suprimida.

Suponiendo entonces una repartición sinusoidal del momento aplicado en el borde a lo largo de él, se logran obtener cuatro ecuaciones de compatibilidad que son suficientes para la determinación de los cuatro momentos en los bordes.

La solución final sólo necesita de la superposición de los estados de simple apoyo con los correspondientes a la acción de las incógnitas determinadas en la forma antes expuesta.

Una idea similar aprovechó Bittner [6] en su trabajo sobre el cálculo de placas cruzadas.

Finalmente el doctor G. Fischer [7-8], en su memoria de doctorado amplió

la idea de Bleich, expresando la ley de distribución del momento aplicado en el borde como la suma de 3 funciones sinusoidales correspondientes a la fundamental, segunda y tercera armónicas con lo cual le fue posible seguir más de cerca la real distribución del momento en los bordes de placas rectangulares no regulares, obteniendo además una ventaja notable en cuanto a considerar disimetrías en las cargas, y en las condiciones de empotramiento.

La solución propuesta por el doctor Fischer, evidentemente más completa que las anteriores, envuelve sin embargo, mayor trabajo y complicación que las soluciones presentadas antes.

En su trabajo supone que la influencia de los momentos expresados en función de una tercera armónica es sólo local y que basta considerar sólo dos primeras armónicas en cada borde (hasta b/a = 1.6), llevando así el caso más general a la solución de un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas lo cual, a pesar de todo, sólo se justificaría para losas de gran luz o con condiciones de carga excepcionales, pero no para los casos más usuales de la práctica.

Ultimamente se ha tenido ocasión de conocer y analizar la solución propuesta por el ingeniero Santiago Arias en su memoria de prueba presentada a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

El método propuesto consiste en considerar totalmente empotradas todas las losas repartiendo luego los momentos desequilibrados de los apoyos, en forma similar a lo hecho por H. Cross, en los sistemas recticulares, según las rigideces de las losas contiguas, hasta obtener el estado de equilibrio general.

En su trabajo el ingeniero Arias, al igual que Bleich, considera una sola sinusoide fundamental como forma de distribución del momento a lo largo del borde, restringiendo así su solución a los casos de simetría de cargas y aquéllos en que la relación entre los lados es menor de 1,6 en que en la forma de distribución del momento a lo largo del apoyo más largo no influye la tercera armónica.

En todo caso este último método presenta la notable ventaja sobre los anteriores de permitir el análisis y definición del estado de cargas que produce el máximo momento en el tramo (cargando según los cuadros del mismo color de un tablero de ajedrez), estado de carga, que puede influenciar fuertemente el valor del momento del tramo.

En el presente trabajo cuyo detalle se pasa a exponer se tratará de resolver el problema aplicando el método de los grados de empotramiento, basándose en los antecedentes y conceptos expuestos por el profesor Mayer [9] y el profesor Hickerson [10] para el estudio de los sistemas de marcos múltiples y vigas y que han sido tratados con bastante extensión en las obras anotadas en la bibliografía.

El cálculo basado en el concepto de los grados de empotramiento no necesita de la resolución de ecuaciones y sólo exige la superposición de los distintos estados de cargas parciales del sistema total.

Su desarrollo puede dividirse claramente en 4 etapas:

1) Cálculo de las rigideces de las losas vecinas en función de los grados de empotramiento de los lados opuestos;

2) Grados de empotramiento de la losa calculada (éstos no dependen del estado de carga y sí sólo de sus condiciones elásticas);

3) Determinación de los momentos de apoyo de la losa cargada con cualquier carga y grados de empotramiento;

4) Distribución de los momentos de apoyo de la losa cargada hacia los apoyos de las losas contiguas descargadas;

Las ventajas que ofrece este método, en cuyos detalles y operatoria se entrará con extensión más adelante, son las siguientes:

a) Permite seguir paso a paso la influencia de cada factor sobre la exactitud del cálculo, facilitando simplificaciones y reducciones en cada caso particular, sin afectar la precisión del resultado final, a diferencia con los demás métodos, que entregan valores finales de equilibrio como consecuencia de todas las influencias de los tramos vecinos;

b) Permite una apreciación más profunda del trabajo elástico del conjunto. Al igual que en el método de Hickerson y Mayer para las vigas. En el caso especial de las losas, por las características mismas del problema, esta solución cobra especial importancia;

c) Permite en forma fácil tomar en cuenta la resistencia a torsión de las vigas perimetrales;

d) Todos los valores necesarios para el cálculo son susceptibles de tabulación.

La desventaja principal y tal vez la única, es la necesidad del empleo de múltiples tablas, cuyo cálculo laborioso, sin embargo, se emprende una sola vez y que formarán parte, más adelante, de este trabajo.

A fin de reducir al máximo el empleo de tablas, se ha propuesto analizar previamente el problema en sus fases más importantes, a fin de hacer las máximas simplificaciones posibles compatibles con la exactitud del cálculo.

Se deja a los lectores el juzgar hasta qué punto esta finalidad se ha alcanzado una vez que hayan recorrido con el autor las distintas etapas de esta exposición.

I. CASO DE LA LOSA SIMPLEMENTE APOYADA EN SU CONTORNO, BAJO LA CARGA DE UN MOMENTO DISTRIBUIDO A LO LARGO DE UN COSTADO, SEGUN LA LEY «Sen α x»

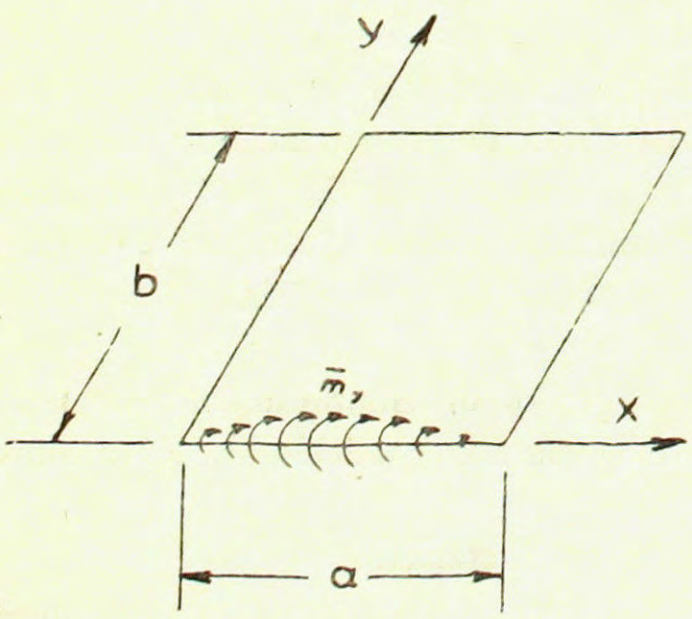

Fig 1

A lo largo del apoyo y = o actúa un momento «$\overline{m}_y$» distribuido en cualquiera forma que puede ser substituido por una suma de series trigonométricas funciones de «Sen αx».

$$\overline{m}_y = \sum_{n=1}^{k} Y_n \text{ Sen } \alpha x$$

$$\text{donde: } \alpha = \frac{n\pi}{a}$$

Y_n — es una constante

n — el número de semiondas.

$$\overline{m}_y = \sum_{n=1}^{k} m_y \quad \text{y} \quad m_y = Y_n \text{ Sen } \alpha x$$

Hay que buscar una solución para el caso de $m_y = Y_n$ Sen$_\alpha$x y des-

pués aplicar la ley de superposición para obtener la distribución a lo largo del apoyo que nos interesa.

La superficie deformada de la placa se puede considerar de la forma (*)

$$w = \frac{1}{\alpha^2} (A \text{ Cosh } \alpha y + \alpha y \text{ B Senh } \alpha y + C \text{Senh} \alpha y + \alpha y \text{ D.Cosh } \alpha y) \text{ Sen } \alpha x \ldots (1)$$

en que «w» es la deformación de la placa en un punto cualquiera y corresponde a la solución de la ecuación diferencial de las placas.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = O$$

el valor de los coeficientes se puede obtener estableciendo las condiciones de borde de la placa.

Las condiciones de borde a establecer son:

en	$x = o$	y	$x = a$	$w = o$	y	$M_x = o$
en	$y = o$			$w = o$	y	$M_y = m_y$
en	$y = b$			$w = o$		$M_y = o$

La ecuación (1) por contener el término «Sen αx» cumple las condiciones de borde para $x = o$ y $x = a$; tenemos por lo tanto cuatro condiciones por cumplir y cuatro incógnitas A, B, C, D, para satisfacerlas.

Se toma para el coeficiente de Poisson el valor 0 (concreto armado); entonces:

$$M_y = - K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \text{donde } K = EJ$$

de (1) se puede obtener

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = [(A + 2 B) \text{ Cos h} \alpha y + \alpha y \text{ B Sen h} \alpha y + (C+2D) \text{ Senh} \alpha y + \alpha y \text{ D Cosh } \alpha y] \text{ Sen } \alpha x$$

a) para $y=0$ debe ser $w = 0$

poniendo estas condiciones en (1) obtenemos $\underline{\underline{A = 0}}$

b) para $y = 0$ debe ser: $- K \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = Y_n \text{ Sen } \alpha x$

$$- K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}_{y=o} = - K (A+2B) \text{ Sen} \alpha x \quad \text{y} \quad \underline{\underline{- K (A+2B) = Y_n}}$$

c) Para $y=b$ $w=o$

$$\underline{\underline{A \text{ Cosh } \alpha b + \alpha b \text{ B Senh } \alpha b + C \text{ Senh} \alpha b + \alpha b \text{ D Cosh } \alpha b = o}}$$

d) para $y=b$ $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = o$

$$\underline{\underline{(A+2B) \text{ Cosh } \alpha b + \alpha b \text{ B Senh } \alpha b + (C+2D) \text{ Senh } \alpha b + \alpha b \text{ D Cosh } \alpha b = o}}$$

(*) Ver Prof. K. Girkmann. Flächentragwerke Wien 1946 pág. 187.

de estas cuatro ecuaciones se pueden obtener los valores para A, B, C, D.

$$A = 0 \qquad C = \frac{Y_n}{2K}\,\alpha b\,(1 - \mathrm{Ctgh}^2 \alpha b)$$

$$B = -\frac{Y_n}{2K} \qquad D = \frac{Y_n}{2K}\,\mathrm{Ctgh}\,\alpha b$$

y en definitiva

$$w = \frac{Y_n}{2K\alpha^2\,\mathrm{Sen\,h}\,\alpha b}\left[\alpha y\,\mathrm{Cosh}\,(b\text{-}y)\,\alpha - \alpha b\,\frac{\mathrm{Senh}\,\alpha y}{\mathrm{Senh}\,\alpha b}\right]\mathrm{Sen}\,\alpha x \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{Y_n}{2K\alpha\,\mathrm{Senh}\,\alpha b}\left[\alpha y\,\mathrm{Cosh}\,\alpha\,(b\text{-}y) - \alpha b\,\frac{\mathrm{Senh}\,\alpha b}{\mathrm{Senh}\,\alpha b}\right]\mathrm{Cos}\,\alpha x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{Y_n}{2K\alpha\,\mathrm{Senh}\,\alpha b}\left[\mathrm{Cosh}\,\alpha\,(b\text{-}y) - \alpha y\,\mathrm{Senh}\,\alpha\,(b\text{-}y) - \alpha b\,\frac{\mathrm{Cosh}\,\alpha y}{\mathrm{Senh}\,\alpha b}\right]\mathrm{Sen}\,\alpha x$$

para el borde $y = 0$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=o} = \frac{Y_n}{2K\alpha}\left[\mathrm{Ctgh}\,\alpha b - \frac{\alpha b}{\mathrm{Senh}^2\,\alpha b}\right]\mathrm{Sen}\,\alpha x$$

para el borde $y = b$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{y=b} = -\frac{Y_n\,(\alpha b\,\mathrm{Ctgh}\,\alpha b - 1)}{2K\alpha\,\mathrm{Senh}\,\alpha b}\cdot\mathrm{Sen}\,\alpha x$$

borde $x = o$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=o} = \frac{Y_n}{2K\alpha\,\mathrm{Senh}\,\alpha b}\left[\alpha y\,\mathrm{Cosh}\,\alpha\,(b - y) - \alpha b\,\frac{\mathrm{Senh}\,\alpha y}{\mathrm{Senh}\,\alpha b}\right]$$

borde $x = a$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=a} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x=o}\cdot\mathrm{Cos}\,n\pi$$

Para el desarrollo del cálculo de las losas se necesitarán los valores de los ángulos de la superficie deformada: $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ en el centro y en los tercios de cada lado de la losa.

Introduciendo $m = \frac{b}{a}$ y reemplazando «b» por «a» se puede obtener para $Y_n = 1$

$$\alpha_1 = \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{\substack{x=o.5a\\ y=o}} = \frac{1}{2K\alpha}\left[\mathrm{Ctgh}\,\alpha ma - \frac{\alpha ma}{\mathrm{Senh}^2\,\alpha ma}\right]$$

$$\beta_1 = \left[\frac{\partial w}{\partial y}\right]_{\substack{x=o\,5a\\ y=b}} = -\frac{\alpha ma\,\mathrm{Ctgh}\,\alpha ma - 1}{2K\alpha\,\mathrm{Senh}\,\alpha ma}$$

$$\gamma_2 = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{\substack{x=o\\ y=o.5b}} = \frac{o.5ma\,\mathrm{Cosh}\,\alpha(o.5ma) - ma\,\frac{\mathrm{Senh}\,\alpha\,(o.5ma)}{\mathrm{Senh}\,\alpha ma}}{2K\,\mathrm{Senh}\,\alpha ma}$$

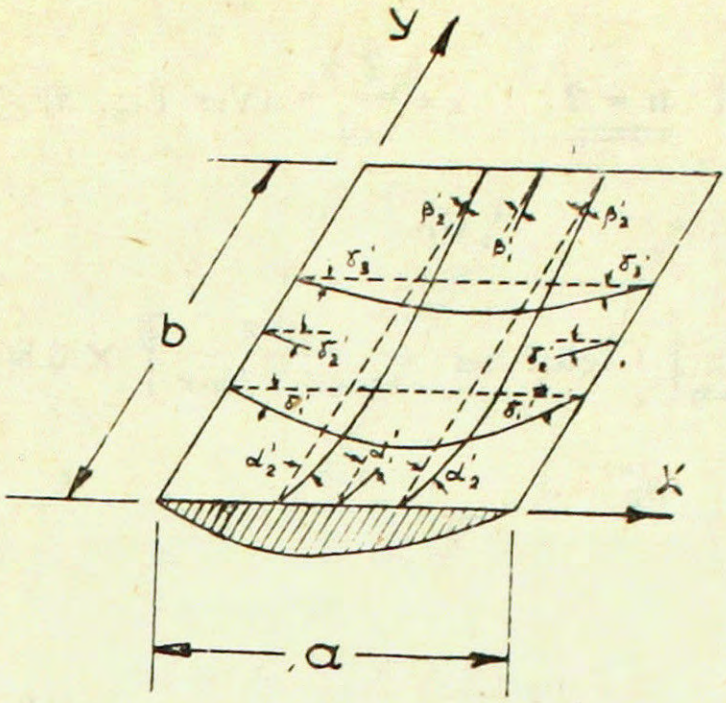

Fig. 2

a) Si $\underline{\underline{n=1}}$

$$\alpha = \frac{\pi}{a} \qquad \text{(ver Fig. 2)}$$

$$\alpha_1' = \frac{a}{2K\pi}\left[\text{Ctgh } m\pi - \frac{m\pi}{\text{Senh}^2\ m\pi}\right]$$

$$\alpha_2' = 0.866\ \alpha_1'$$

$$\beta_1' = -\frac{a\,[m\pi\ \text{Ctgh}\ m\pi - 1]}{2\,K\pi\ \text{Senh}\ m\pi}$$

$$\beta_2' = 0.866\ \beta_1'$$

$$\gamma_1' = \frac{a}{2K\pi\ \text{Senh}\ m\pi}\left[0.33\ m\pi\ \text{Cosh}\ 0.67\ m\pi - m\pi\ \frac{\text{Senh}\ 0.33\ m\pi}{\text{Senh}\ m\pi}\right]$$

$$\gamma_2' = \frac{a}{2K\pi\ \text{Senh}\ m\pi}\left[0.50\ m\pi\ \text{Cosh}\ 0.50\ m\pi - m\pi\ \frac{\text{Senh}\ 0.5\ m\pi}{\text{Senh}\ m\pi}\right]$$

$$\gamma_3' = \frac{a}{2K\pi\ \text{Senh}\ m\pi}\left[0.67\ m\pi\ \text{Cosh}\ 0.33\ m\pi - m\pi\ \frac{\text{Senh}\ 0.67\ m\pi}{\text{Senh}\ m\pi}\right]$$

Tabla I de valores α_1', β_1', γ_1', γ_2', γ_3'

m	α_1'		β_1'		γ_1'		γ_2'		γ_3'	
	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$
0.5	0.794	1.588	0.310	0.620	0.201	0.403	0.194	0.388	0.148	0.295
0.6	0.865	1.442	0.303	0.505	0.242	0.404	0.234	0.390	0.180	0.300
0.7	0.914	1.305	0.282	0.403	0.287	0.409	0.264	0.377	0.193	0.275
0.8	0.946	1.182	0.253	0.316	0.315	0.394	0.280	0.350	0.201	0.251
0.9	0.966	1.073	0.219	0.243	0.334	0.371	0.289	0.321	0.201	0.223
1.0	0.980	0.980	0.186	0.186	0.344	0.344	0.287	0.287	0.196	0.196
1.1	0.988	0.898	0.155	0.141	0.349	0.317	0.279	0.254	0.183	0.166
1.2	0.993	0.828	0.128	0.107	0.348	0.290	0.267	0.223	0.169	0.141
1.3	0.995	0.765	0.104	0.080	0.343	0.264	0.252	0.194	0.153	0.118
1.4	0.997	0.712	0.084	0.060	0.335	0.239	0.235	0.168	0.138	0.099
1.5	0.998	0.665	0.067	0.045	0.325	0.217	0.217	0.145	0.123	0.082
1.6	0.999	0.624	0.053	0.033	0.314	0.196	0.199	0.124	0.108	0.068
1.7	1.000	0.588	0.042	0.025	0.301	0.177	0.182	0.107	0.095	0.056
1.8	1.000	0.555	0.032	0.018	0.287	0.159	0.165	0.092	0.083	0.046
2.0	1.000	0.500	0.020	0.010	0.260	0.130	0.135	0.068	0.060	0.030

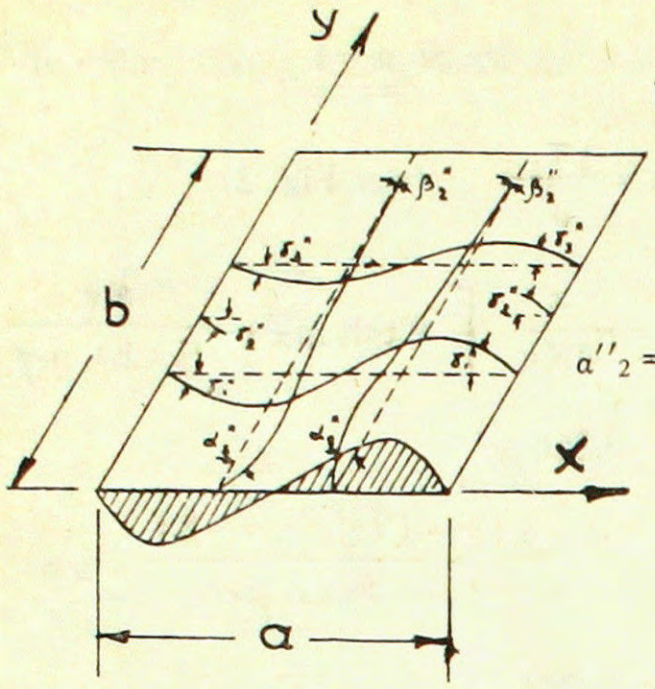

Fig. 3.

b) Si $\underline{\underline{n = 2}}$ $\quad \alpha = \dfrac{2\,\pi}{a}$ (Ver Fig. 3)

$$\alpha''_1 = 0$$

$$\alpha''_2 = \frac{a}{4\,K\pi}\left[\,\mathrm{Ctgh}\ 2\ m\pi - \frac{2m\pi}{\mathrm{Senh}^2\ 2m\pi}\right] \times 0.866$$

$$\beta_1'' = 0$$

$$\beta''_2 = -\frac{a\ [\ m\pi\ \mathrm{Ctgh}\ 2m\pi - 0.50\ ]}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\ 2m\pi} \times 0.866$$

$$\gamma''_1 = \frac{a}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\ 2m\pi}\left[0.33\ m\pi\ \mathrm{Cosh}\ 1.34\ m\pi - m\pi\ \frac{\mathrm{Senh}\ 0.66m\pi}{\mathrm{Senh}\ 2m\pi}\right]$$

$$\gamma''_2 = \frac{a}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\ 2m\pi}\left[0.50\ m\pi\ \mathrm{Cosh}\ m\pi - m\pi\ \frac{\mathrm{Senh}\ m\pi}{\mathrm{Senh}\ 2m\pi}\right]$$

$$\gamma''_3 = \frac{a}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\ 2m\pi}\left[0.67\ m\pi\ \mathrm{Cosh}\ 0.66\ m\pi - m\pi\ \frac{\mathrm{Senh}\ 1.34\ m\pi}{\mathrm{Senh}\ 2\ m\pi}\right]$$

Tabla 2 de valores α_2'', β_2'', γ_1'', γ_2'', γ_3''

m	α_2''		β_2''		γ_1''		γ_2''		γ_3''	
	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$
0.5	0.424	0.848	0.081	0.161	0.172	0.344	0.143	0.286	0.097	0.194
0.6	0.430	0.717	0.055	0.093	0.175	0.293	0.133	0.222	0.085	0.142
0.7	0.432	0.617	0.036	0.052	0.167	0.239	0.117	0.167	0.070	0.099
0.8	0.433	0.541	0.023	0.028	0.156	0.195	0.100	0.125	0.054	0.068
0.9	0.433	0.481	0.014	0.015	0.143	0.159	0.083	0.092	0.041	0.046
1.0	0.433	0.433	0.009	0.009	0.129	0.129	0.067	0.067	0.030	0.030
1.1	0.433	0.394	—	—	0.115	0.104	0.054	0.049	0.022	0.020
1.2	0.433	0.361	—	—	0.102	0.085	0.043	0.036	0.016	0.013
1.3	0.433	0.333	—	—	0.090	0.069	0.034	0.026	0.011	0.008
1.4	0.433	0.309	—	—	0.079	0.056	0.027	0.019	0.008	0.006
1.5	0.433	0.289	—	—	0.069	0.046	0.021	0.014	0.006	0.004
1.6	0.433	0.271	—	—	0.060	0.038	0.017	0.011	—	—
1.7	0.433	0.255	—	—	0.051	0.030	0.013	0.008	—	—
1.8	0.433	0.241	—	—	0.044	0.024	0.010	0.006	—	—
2.0	0.433	0.216	—	—	0.032	0.016	0.006	0.003	—	—

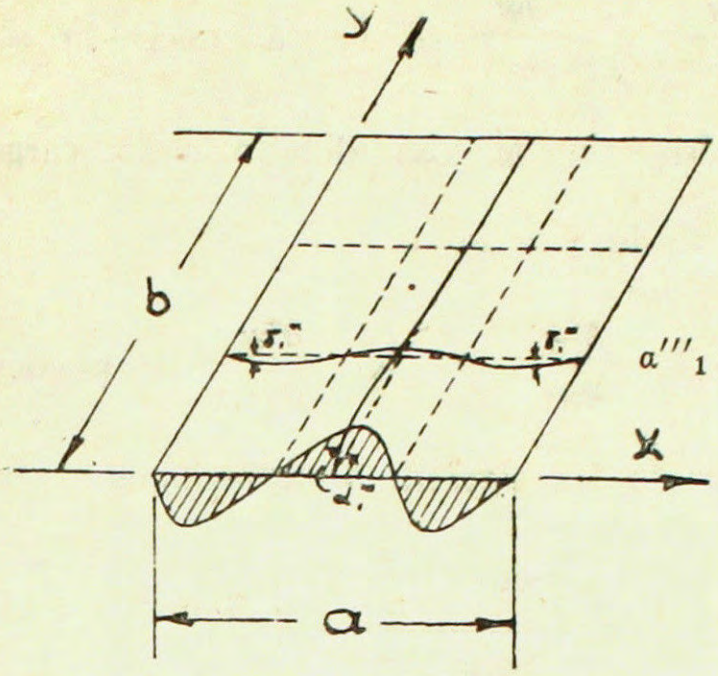

Fig. 4

c) Si $\underline{\underline{n = 3}}$ $\quad \alpha = \dfrac{3\,\pi}{a}$ (ver Fig. 4)

$$\alpha'''_1 = \frac{a}{6\,K\pi}\left[\,\mathrm{Ctgh}\,3m\pi - \frac{3\,m\pi}{\mathrm{Senh}^2\,3m\pi}\right]$$

$$\alpha'''_2 = 0$$

$$\beta_1''' = \frac{a\,[-m\pi\ \mathrm{Ctgh}\,3m\pi + 0.33]}{2\,K\pi\ \mathrm{Senh}\,3\,m\pi}$$

$$\beta_2''' = 0$$

$$\gamma_1''' = \frac{a}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\,3m\pi}\left[0.33\,m\pi\ \mathrm{Cosh}\,2.01\,m\pi - m\pi\,\frac{\mathrm{Senh}\,0.99\,m\pi}{\mathrm{Senh}\,3m\pi}\right]$$

$$\gamma_2''' = \frac{a}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\,3m\pi}\left[0.50\,m\pi\ \mathrm{Cosh}\,1.50\,m\pi - m\pi\,\frac{\mathrm{Senh}\,1.50\,m\pi}{\mathrm{Senh}\,3\,m\pi}\right]$$

$$\gamma_3''' = \frac{a}{2K\pi\ \mathrm{Senh}\,3m\pi}\left[0.67\,m\pi\ \mathrm{Cosh}\,0.99\,m\pi - m\pi\,\frac{\mathrm{Senh}\,2.01\,m\pi}{\mathrm{Senh}\,3\,m\pi}\right]$$

Tabla 3 de valores α_1''', β_1''', γ_1''', γ_2''', γ_3'''

m	α_1'''		β_1'''		γ_1'''		γ_2'''		γ_3'''	
	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$	$\times \frac{a}{2K\pi}$	$\times \frac{b}{2K\pi}$
0.5	0.333	0.666	0.022	0.044	0.108	0.216	0.072	0.144	0.041	0.082
0.6	0.333	0.555	0.011	0.018	0.095	0.158	0.055	0.092	0.028	0.047
0.7	0.333	0.476	0.005	0.007	0.081	0.116	0.040	0.057	0.017	0.024
0.8	0.333	0.416	—	—	0.068	0.085	0.027	0.034	0.011	0.014
0.9	0.333	0.370	—	—	0.056	0.062	0.020	0.022	0.006	0.007
1.0	0.333	0.333	—	—	0.045	0.045	0.014	0.014	0.004	0.004
1.1	0.333	0.303	—	—	0.036	0.033	0.009	0.008	—	—
1.2	0.333	0.278	—	—	0.029	0.024	0.005	0.004	—	—
1.3	0.333	0.256	—	—	0.023	0.018	—	—	—	—
1.4	0.333	0.238	—	—	0.018	0.013	—	—	—	—
1.5	0.333	0.222	—	—	0.014	0.009	—	—	—	—
1.6	0.333	0.208	—	—	0.011	0.007	—	—	—	—
1.7	0.333	0.196	—	—	0.009	0.005	—	—	—	—
1.8	0.333	0.185	—	—	0.007	0.004	—	—	—	—
2.0	0.333	0.167	—	—	0.004	0.002	—	—	—	—

Además de los ángulos de rotación $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$ se va a necesitar la distribución de momentos «M_x» y «M_y» en la losa debido a la carga $M_y = 1 \cdot \text{Sen} \frac{n\pi}{a} x$ aplicada al borde y = o.

De la ecuación (2) tomando $-K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ y $-K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ se pueden obtener los valores para «M_x» y «M_y» de las siguientes expresiones

$$M_x = \frac{1}{2\,\text{Senh}\, nm\pi}\left[\frac{n\pi}{a} y \text{Cosh}\frac{n\pi}{a}(b-y) - nm\pi \frac{\text{Senh}\frac{n\pi}{a} y}{\text{Senh}\, nm\pi}\right] \text{Sen}\frac{n\pi}{a} x \quad (3)$$

Tabla 4

para «My»

m \ y	0	0.10 b	0.20 b	0.30 b	0.40 b	0.50 b	0.60 b	0.70 b	0.80 b	0.90 b	1.0 b
0.3	1.000	0.856	0.717	0.605	0.493	0.401	0.315	0.224	0.150	0.069	0
0.4	1.000	0.820	0.678	0.545	0.441	0.344	0.259	0.190	0.122	0.062	0
0.5	1.000	0.786	0.623	0.478	0.369	0.279	0.207	0.140	0.090	0.045	0
0.6	1.000	0.756	0.564	0.417	0.305	0.221	0.157	0.106	0.066	0.032	0
0.7	1.000	0.718	0.510	0.358	0.247	0.168	0.111	0.070	0.041	0.019	0
0.8	1.000	0.682	0.460	0.304	0.197	0.123	0.073	0.042	0.022	0.010	0
0.9	1.000	0.653	0.410	0.258	0.152	0.085	0.045	0.021	0.010	—	0
1.0	1.000	0.621	0.368	0.213	0.113	0.056	0.023	—	—	—	—
1.1	1.000	0.584	0.332	0.175	0.085	0.032	—	—	—	—	—
1.2	1.000	0.555	0.297	0.144	0.059	0.015	—	—	—	—	—
1.3	1.000	0.531	0.262	0.115	0.038	—	—	—	—	—	—
1.4	1.000	0.503	0.233	0.092	0.023	—	—	—	—	—	—
1.5	1.000	0.477	0.207	0.073	0.011	—	—	—	—	—	—
1.6	1.000	0.457	0.181	0.055	—	—	—	—	—	—	—
1.7	1.000	0.433	0.160	0.041	—	—	—	—	—	—	—
1.8	1.000	0.407	0.141	0.028	—	—	—	—	—	—	—
1.9	1.000	0.384	0.123	0.017	—	—	—	—	—	—	—
2.0	1.000	0.364	0.105	0.010	—	—	—	—	—	—	—

$$M_y = \frac{1}{2 \text{ Senh } nm\pi} \left[2 \text{ Senh } \frac{n\pi}{a}(b-y) - \frac{n\pi}{a} y \text{ Cosh } \frac{n\pi}{a}(b-y) + \right.$$

$$\left. + n\, m\, \pi \frac{\text{Senh } \frac{n\pi}{a} y}{\text{Senh } nm\pi} \right] \text{Sen } \frac{n\pi}{a} x. \ldots \quad (4)$$

para, n = 1 introduciendo valores de y = o; o,10 b; o,20 b; etc. se pueden calcular los valores máximos de «M_y» y «M_x» para $x = \frac{a}{2}$ que figuran en tablas 4 y 5

Tabla 5 para «M_x»

m \ y	0	0.10 b	0.20 b	0.30 b	0.40 b	0.50 b	0.60 b	0.70 b	0.80 b	0.90 b	1.0b
0.3	0	0.022	0.037	0.045	0.049	0.047	0.042	0.035	0.025	0.013	0
0.4	0	0.037	0.059	0.073	0.076	0.072	0.063	0.051	0.035	0.018	0
0.5	0	0.052	0.082	0.098	0.102	0.097	0.085	0.072	0.047	0.025	0
0.6	0	0.066	0.105	0.123	0.126	0.117	0.102	0.081	0.055	0.027	0
0.7	0	0.079	0.123	0.141	0.143	0.132	0.113	0.089	0.061	0.031	0
0.8	0	0.090	0.138	0.155	0.154	0.142	0.118	0.092	0.063	0.032	0
0.9	0	0.101	0.152	0.167	0.162	0.143	0.120	0.091	0.062	0.031	0
0.1	0	0.110	0.161	0.173	0.164	0.144	0.117	0.088	0.059	0.029	0
1.1	0	0.122	0.169	0.176	0.164	0.140	0.112	0.083	0.054	0.027	0
1.2	0	0.129	0.174	0.178	0.160	0.133	0.105	0.076	0.049	0.024	0
1.3	0	0.136	0.180	0.178	0.155	0.125	0.097	0.069	0.044	0.021	0
1.4	0	0.141	0.181	0.174	0.148	0.117	0.088	0.061	0.039	0.019	0
1.5	0	0.146	0.182	0.171	0.141	0.108	0.079	0.054	0.034	0.016	0
1.6	0	0.152	0.184	0.167	0.134	0.099	0.071	0.048	0.029	0.013	0
1.7	0	0.159	0.183	0.161	0.125	0.091	0.063	0.041	0.025	0.011	0
1.8	0	0.162	0.183	0.156	0.118	0.083	0.056	0.036	0.021	0.010	0
1.9	0	0.165	0.181	0.149	0.109	0.074	0.049	0.031	0.017	0.008	0
2.0	0	0.167	0.178	0.143	0.101	0.067	0.043	0.026	0.014	0.006	0

Las tablas 4 y 5 pueden también utilizarse para obtener los valores en el tramo de «M_y» y «M_x», debidos a la acción de los momentos de borde según n = 2 (segunda armónica) y n = 3 (tercera armónica)

Para obtener los valores de n = 2 y n = 3 se entra en las tablas con nuevos coeficientes «m» $m = \frac{2b}{a}$ y $m = \frac{3b}{a}$

Por ejemplo: para $n = 2$ y $m = 1$ $y = 0.10$ b.

$M_y = 0.364$ $M_x = 0.167$

si $n = 3$ $m = 0.6$ $y = 0.30$ b.

$M_y = 0\,028$ $M_x = 0.156$

Los valores para $n = 2$ corresponden a $x = \frac{a}{4}$ (ver Fig. 3)

,, ,, ,, $n = 3$,, ,, $x = \frac{a}{6}$ (ver Fig. 4)

La distribución de los momentos M_x y M_y en el sentido «x» será según la ley sinusoidal $A \operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x$ establecida en las eq, (3) y (4).

Es muy útil dibujar los valores de las tablas 4 y 5 tomando «y» como función de «a» en vez de «b»
(Ver Fig. 5 para «My» y Fig. 6 para «Mx»).

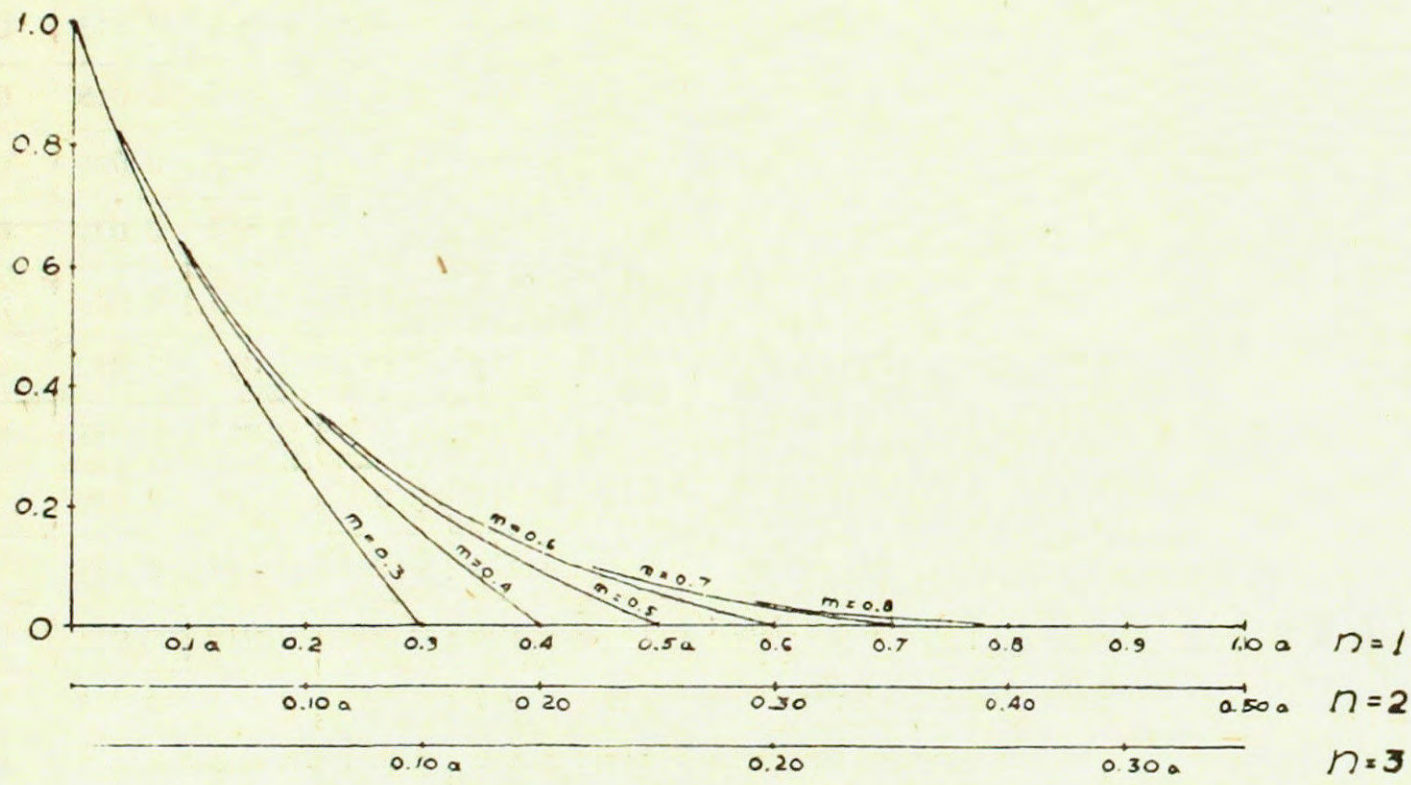

Fig. 5.

La amortiguación de «My» es muy fuerte, como puede verse en Fig. 5. Para $n = 1$ a distancias del borde de 0.30 a para $m \geq 0.5$ «My» queda reducido solamente a un $\approx 20\%$ de su valor al borde.

Para $n = 2$ a una distancia de 0.10a queda sólo un $\approx 36\%$ y finalmente si $n = 3$ para 0.10a el momento «My» se reduce en ese punto a sólo 20%.

De aquí se puede concluir que los momentos de apoyo correspondientes a las 2.as y 3.as armónicas en el sentido de su acción no alcanzan a influir sobre el momento del tramo.

Se puede ver claramente que el trabajo de la losa es muy diferente del de la viga.

Para $m = 1$ y $n = 1$ la influencia de «M_y^{ap}» medida en el centro de la losa en el sentido «y» es solamente $\approx 10\%$ del valor que tendría para una viga de igual luz solicitada en el apoyo por un momento.

Los momentos «M_x» en cambio tienen amortiguaciones mucho más débiles que «M_y» y su influencia alcanza más lejos (ver Fig. 6).

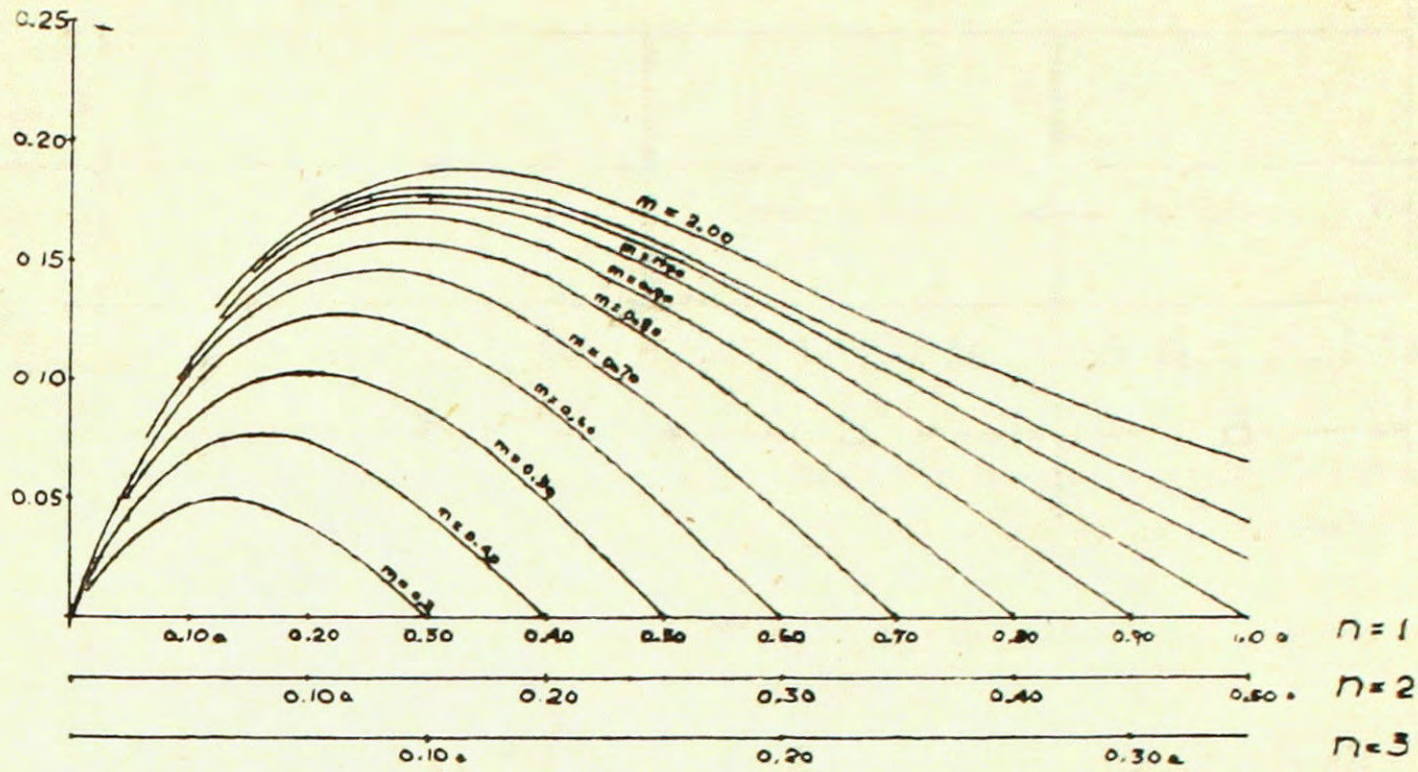

Fig. 6.

En general se puede establecer que para los momentos del tramo son de más importancia (especialmente en la dirección del lado más largo), los momentos de apoyo que actúan en sentido perpendicular al sentido del momento del tramo.

Para el momento del tramo «M_{tr}» en sentido «x» es siempre de más importancia el momento de apoyo «M_y» que «M_x» y a la inversa para «M_{tr}» en el sentido «y» influye más «M_x» que «M_y».

De esta particularidad se deduce que el método de cálculo de losas continuas basado en una distribución de las cargas en dos sentidos y calculando posteriormente cada serie de losas con sus cargas como si constituyeran franjas de vigas continuas (como, por ejemplo, se indica en DIN. 1045 § 23) como método de aplicación general no puede justificarse.

El método de cálculo recomendado por DIN puede emplearse y es acertado en el caso de campos de losas continuas en dos direcciones con tramos y cargas iguales o casi iguales.

En este caso, considerando por ejemplo el trabajo de la losa en sentido x — x, los momentos de apoyo «M_y» compensan la influencia de los momentos de apoyo «M_x» en forma tal que **la suma** de ellos da para el tramo un efecto parecido al que resultará de la aplicación de un momento en el apoyo de una viga (diagrama de momentos triangular), porque se suman los diagramas de momentos de la Fig. 5 con los dos diagramas sinusoidales producidos por «$M_x{}^{ap}$» en el sentido «y».

Por ejemplo, en una losa cuadrada que tiene sus tres costados (y = o; x = o; x = a), solicitados por momentos «M» (n = 1) se tiene en el centro del tramo (0.056 + 2 x 0.144) M = 0.344 M ó 34.4% del momento «M», lo cual ya se acerca bastante al valor del 50% que corresponde a la viga solicitada en su extremo por un momento.

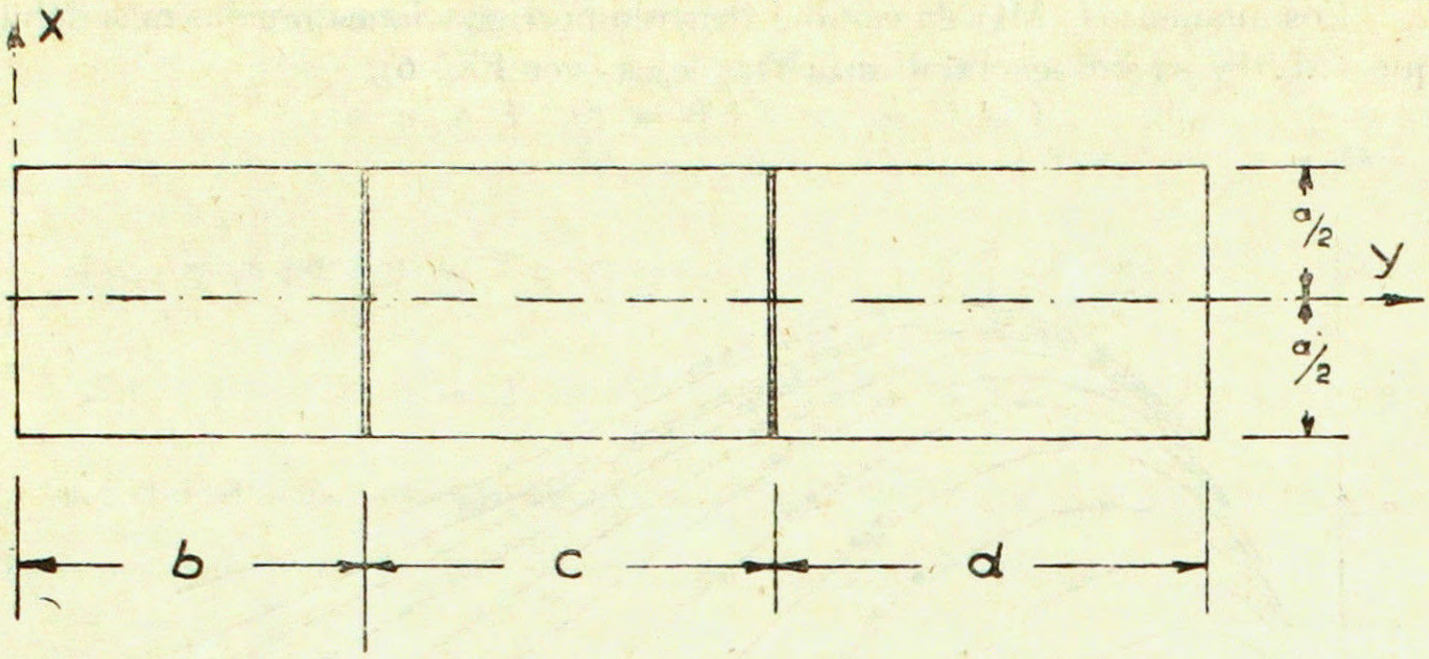

Fig. 7

En el caso extremo si se trata del cálculo de la serie de losas según la Fig. 7. que tienen sus apoyos $x = \pm \frac{a}{2}$ libremente apoyados si b/a, c/a y d/a $\geq$ 1.20 los momentos del tramo en el centro de las losas en sentido «y» no sufren influencia alguna por causa de los momentos de apoyo.

El efecto de continuidad se pierde completamente, y el momento del tramo «M_{tr}» en sentido «y» de cualquiera carga será, con una diferencia de un leve porcentaje, el mismo que para una losa simplemente apoyada en todo su contorno.