Cálculo de losas cruzadas continuas

Trabajo presentado a las Cuartas Jornadas de Ingeniería Estructural por el Ing. Alex Tripolsky.

II. RELACION ENTRE ANGULOS DE ROTACION Y MOMENTOS DE LOS BORDES

a) Caso de diagramas de momentos de apoyos simétricos.

Suponemos que una placa simplemente apoyada está cargada con cualquier carga vertical (hacia abajo con signo más) que provoca al medio de cada lado un cierto ángulo de rotación φ_a^o, φ_b^o, φ_c^o, φ_d^o, (ver Fig. 8), además de la carga sobre la losa a lo largo de los bordes están actuando momentos variables con valores correspondientes en el centro de cada borde M_a, M_b, M_c, M_d.

Primero vamos a tratar el caso más simple cuando la distribución de los momentos es simétrica con respecto al centro de los bordes.

Introduciremos las siguientes notaciones:

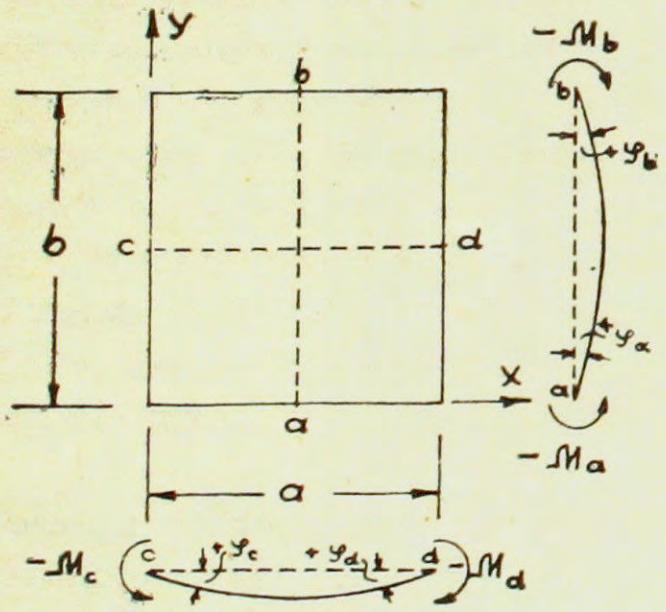

Fig. 8

φ_{aa} es el ángulo de rotación del centro de lado «a» bajo actuación de $M_a = +1$

φ_{bb} es el ángulo de rotación del centro de lado «b» bajo actuación de $M_b = +1$

etc.

La notación de todos los ángulos tiene dos letras: la primera indica el punto en que se produce la rotación y la segunda la causa; por ejemplo φ_{bc} es el ángulo de rotación del punto «b» a causa de $M_c = +1$.

Empleando las notaciones antes indicadas se pueden escribir las ecuaciones de deformación angular de los centros de los cuatro lados en la forma siguiente:

$$\varphi_a = \varphi_{aa} M_a + \varphi_{ab} M_b + \varphi_{ac} M_c + \varphi_{ad} M_d + \varphi_a^o \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

$$\varphi_b = \varphi_{ba} M_a + \varphi_{bb} M_b + \varphi_{bc} M_c + \varphi_{bd} M_d + \varphi_b^o \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$$\varphi_c = \varphi_{ca} M_a + \varphi_{cb} M_b + \varphi_{cc} M_c + \varphi_{cd} M_d + \varphi_c^o \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\varphi_d = \varphi_{da} M_a + \varphi_{db} M_b + \varphi_{dc} M_c + \varphi_{dd} M_d + \varphi_d^o \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Si la distribución de momentos es simétrica con respecto al centro de cada borde, y considerando además que la forma de distribución de los momentos de los lados opuestos es igual tendremos:

$$\varphi_{aa} = \varphi_{bb} \qquad \varphi_{cc} = \varphi_{dd}$$

$$\varphi_{ca} = \varphi_{da} = \varphi_{cb} = \varphi_{db} \qquad \varphi_{bc} = \varphi_{ac} = \varphi_{bd} = \varphi_{ad}$$

introduciendo

$$\varphi_{aa} = \varphi_{bb} = \varphi_1 \qquad \varphi_{ab} = \varphi_{ba} = \varphi_2 \qquad \varphi_{ca} = \varphi_{cb} = \varphi_{da} = \varphi_{db} = \varphi_5$$

$$\varphi_{cc} = \varphi_{dd} = \varphi_3 \qquad \varphi_{cd} = \varphi_{dc} = \varphi_4 \qquad \varphi_{bc} = \varphi_{bd} = \varphi_{ac} = \varphi_{ad} = \varphi_6$$

se puede simplificar las fórmulas (5) a (8) y se obtiene

$$\varphi_a = \varphi_1 M_a + \varphi_2 M_b + \varphi_6 M_c + \varphi_6 M_d + \varphi_a^o \quad \ldots\ldots \quad (5a)$$

$$\varphi_b = \varphi_2 M_a + \varphi_1 M_b + \varphi_6 M_c + \varphi_6 M_d + \varphi_b^o \quad \ldots\ldots \quad (6a)$$

$$\varphi_c = \varphi_5 M_a + \varphi_5 M_b + \varphi_3 M_c + \varphi_4 M_d + \varphi_c^o \quad \ldots\ldots \quad (7a)$$

$$\varphi_d = \varphi_5 M_a + \varphi_5 M_b + \varphi_4 M_c + \varphi_3 M_d + \varphi_d^o \quad \ldots\ldots \quad (8a)$$

resolviendo estas ecuaciones para los momentos obtendremos

$$M_a = \frac{1}{Z}\Big(\big[\varphi_1(\varphi_3+\varphi_4)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](\varphi_a-\varphi_a^o)+\big[\varphi_2(\varphi_3+\varphi_4)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](-\varphi_b+\varphi_b^o)-$$
$$-\big[\varphi_6(\varphi_1-\varphi_2)\big](\varphi_c-\varphi_c^o)+\big[\varphi_6(\varphi_1-\varphi_2)\big](-\varphi_d+\varphi_d^o)\Big) \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$M_b = -\frac{1}{Z}\Big\{\big[\varphi_2(\varphi_3+\varphi_4)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](\varphi_a-\varphi_a^o)+\big[\varphi_1(\varphi_3+\varphi_4)-2\varphi_5\varphi_6\big](-\varphi_b+\varphi_b^o)$$
$$+\big[\varphi_6(\varphi_1-\varphi_2)\big](\varphi_c-\varphi_c^o)-\big[\varphi_6(\varphi_1-\varphi_2)\big](-\varphi_d+\varphi_d^o)\Big\} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$M_c = \frac{1}{U}\Big\{\big[\varphi_3(\varphi_1+\varphi_2)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](\varphi_c-\varphi_c^o)+\big[\varphi_4(\varphi_1+\varphi_2)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](-\varphi_d+\varphi_d^o)-$$
$$-\big[\varphi_5(\varphi_3-\varphi_4)\big](\varphi_a-\varphi_a^o)+\big[\varphi_5(\varphi_3-\varphi_4)\big](-\varphi_b+\varphi_b^o)\Big\} \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$M_d = -\frac{1}{U}\Big\{\big[\varphi_4(\varphi_1+\varphi_2)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](\varphi_c-\varphi_c^o)+\big[\varphi_3(\varphi_1+\varphi_2)-2\,\varphi_5\,\varphi_6\big](-\varphi_d+\varphi_d^o)+$$
$$+\big[\varphi_5(\varphi_3-\varphi_4)\big](\varphi_a-\varphi_a^o)-\big[\varphi_5(\varphi_3-\varphi_4)\big](-\varphi_6+\varphi_b^o)\Big\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

en que

$$Z = (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)(\varphi_3 + \varphi_4) - 4(\varphi_1 - \varphi_2)\,\varphi_5\,\varphi_6$$

$$U = (\varphi_1 + \varphi_2)(\varphi_3^2 - \varphi_4^2) - 4(\varphi_3 - \varphi_4)\,\varphi_5\,\varphi_6$$

Si tomamos como ejemplo una losa para la cual $m = \frac{b}{a} = 0.25$ la losa se comportará como una losa de armadura simple en el sentido «b».

y para $\varphi_6 \simeq 0$

$$M_a = \frac{\varphi_1\,(\varphi_a - \varphi_a^o) + \varphi_2\,(-\varphi_b + \varphi_b^o)}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}$$

$$M_b = \frac{-\varphi_2\,(\varphi_a - \varphi_a^o) - \varphi_1(-\varphi_b + \varphi_b^o)}{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}$$

si $\varphi_a = 0$ y $\varphi_b = 0$ $\quad M_a = C_a$ y $M_b = C_b$ en que «C» son los momentos de empotramiento perfecto, obtendremos para $m = 0.25$ con bastante exactitud. $\varphi_1 = \frac{b}{3EI}$ y $\varphi_2 = \frac{b}{6EI}$

Poniendo estos valores en las ecuaciones para «M_a» y «M_b» obtendremos:

$$M_a = \frac{2EI}{b}\,(2\,\varphi_a - \varphi_b) + C_a$$

$$M_b = \frac{2EI}{b}\,(2\,\varphi_b - \varphi_a) + C_b$$

Valores que son iguales a los obtenidos en la conocida expresión de momentos, en función de los ángulos de rotación y de los momentos de empotramiento perfecto en el método de las deformaciones aplicado a las vigas.

Como ya se indicó antes las ecuaciones (9) a (12) están basadas en la condición de simetría de los diagramas de momentos con respecto al centro de cada lado.

Esta condición tomada estrictamente nos obliga a tratar solamente problemas en que

$$\varphi_a = \varphi_b \quad y \quad \varphi_c = \varphi_d$$

Vamos a hacer algunas aplicaciones de las fórmulas obtenidas para el caso de losas empotradas perfectamente sometidas a una carga repartida sobre toda su superficie.

En este caso

$$\varphi_a = \varphi_b = 0 \quad \varphi_c = \varphi_d = 0 \quad \varphi_a^o = \varphi_b^o \quad \varphi_c^o = \varphi_d^o$$

$$M_a = M_b = C_a \qquad M_c = M_d = C_c$$

y

$$C_a = -\frac{(\varphi_3 + \varphi_4)\,\varphi_a^c - 2\,\varphi_6\,\varphi_c^o}{(\varphi_1 + \varphi_2)\,(\varphi_3 + \varphi_4) - 4\,\varphi_5\varphi_6} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$C_c = - \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)\ \varphi_c^{o} - 2\ \varphi_5\ \varphi_a^{o}}{(\varphi_1 + \varphi_2)\ (\varphi_3 + \varphi_4) - 4\ \varphi_5\ \varphi_6} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (14)$$

si suponemos que la forma de distribución de los momentos a lo largo de los bordes es $M_a \operatorname{Sen} \frac{\pi\ x}{a}$ ó $M_c \operatorname{Sen} \frac{\pi\ y}{b}$

entonces

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 = \alpha'_1 \\ \varphi_2 = \beta'_1 \\ \varphi_5 = \gamma'_2 \end{array}\right\} \text{ para } m = \frac{b}{a} \qquad \left.\begin{array}{l} \varphi_3 = \alpha'_1 \\ \varphi_4 = \beta'_1 \\ \varphi_6 = \gamma'_2 \end{array}\right\} \text{ para } m = \frac{a}{b}$$

(ver Tabla 1)

Por ejemplo para una losa cuadrada m = 1, cuya carga es «q» se tendrá:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = 0.980 \frac{a}{2k\pi} \qquad \varphi_2 = \varphi_4 = 0.186 \frac{a}{2k\pi} \qquad \varphi_5 = \varphi_6 = 0.287 \frac{a}{2k\pi}$$

$$\varphi_a^{o} = \varphi_c^{o} = 0.01348 \frac{q\ a^3}{k}$$

$$C_a = C_c = - \frac{(0.980 + 0.186) - 0.574}{1.166^2 - 4 \times 0.287^2} \times 2\ \pi \times 0.01348\ qa^2 = -0.0487\ qa^2$$

según Timoshenko $C = -0.0513\ qa^2$, se ve que la diferencia es sólo de un 5,4%.

Calculando los valores de «C» para losas con diferentes relaciones de lados «m» podemos compararlos con los valores obtenidos por el profesor S. Timoshenko [11] y que hemos anotado en la Tabla 6.

TABLA 6

$m = \frac{b}{a}$		1	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
Según Timoshenko	C_c	0.0513	0.0581	0.0639	0.0687	0.0726	0.0757	0.0780	0.0799	0.0812	0.0822	0.0829
	C_a	0.0513	0.0538	0.0554	0.0563	0.0568	0.0569	0.0571	0.0571	0.0571	0.0571	0.0571
Según form. (13) y (14)	C_c	0.0487	0.0556	0.0617	0.0666	0.0709	0.0748	0.0780	0.0803	0.0827	0.0848	0.0859
	C_a	0.0487	0.0503	0.0520	0.0532	0.0540	0.0543	0.0545	0.0547	0.0547	0.0547	0.0547

para obtener los momentos todos estos valores se deben multiplicar por $-qa^2$.

Como se puede ver, la aproximación es muy buena y además puede ser mejorada introduciendo la influencia de los momentos correspondientes a la 3ª armónica n = 3.

Tomando otras cargas simétricas podríamos también comprobar que la su-

posición de distribución de momentos según la 1ª armónica n = 1 siempre nos dará, desde un punto de vista práctico, una exactitud satisfactoria.

Para cargas asimétricas, como por ejemplo la carga triangular o la carga aislada colocada asimétricamente no puede aplicarse la suposición anterior, en el sentido de que la distribución de los momentos se produce según la armónica fundamental.

Además, y para las cargas simétricas, los diferentes grados de empotramiento elástico de los lados adyacentes producen una asimetría en la distribución de los momentos que en muchos casos no puede despreciarse.

Todo esto nos obliga, para encontrar la solución general del problema, a introducir en la expresión de los momentos de apoyo además de la primera armónica n = 1 las funciones sinusoidales correspondientes a las armónicas superiores n=2 y n=3.

Se podrían exponer aquí varios ejemplos numéricos que probarían el error que significa suponer en forma simple una distribución sinusoidal simétrica, pero esta demostración la dejaremos para más adelante cuando obtengamos los sistemas de ecuaciones que rigen el caso general y que contienen la influencia de las armónicas superiores.

b) Caso de cualquier diagrama de momentos de apoyo

Para abordar el problema en el caso más general, hay que expresar los momentos de apoyos como suma de tres funciones sinusoidales de 1, 2 y 3 semiondas.

Si tomamos como incógnitas sus valores máximos, vamos a tener en cada borde 3 variables lo cual da para la losa completa 12 incógnitas.

La existencia de tres variables en cada borde nos lleva a la necesidad de considerar deformaciones angulares en tres puntos de cada borde, a fin de poder escribir, aprovechando las tablas 1, 2 y 3, las tres ecuaciones de condición por borde o sea un total de 12 ecuaciones análogas a las ecuaciones (5) a (8).

Podemos ver que es prácticamente imposible resolver estas ecuaciones para el caso general de cualquier valor de «m», debido a la gran cantidad de coeficientes variables a considerar; por esta razón vamos a estudiar cada valor de «m» separadamente.

Para obtener la solución completa de m = 0.5 a m = 2.0 es suficiente considerar seis casos m = 0.50; 0.60; 0.70; 0.80; 0.90, 1.00 porque cambiando «a» por «b» y «b» por «a» obtenemos los valores inversos m = 2.0; 1.67; 1.43; 1.25; 1.11 cuya interpolación puede darnos valores para cualquier valor de «m» de 0.50 a 2.00.

La teoría del método propuesto es independiente de la relación de los lados «m»; por lo tanto para la deducción de las fórmulas, podemos limitarnos al caso más fácil — el caso de losa cuadrada en que m = 1, y que tiene validez para cualquier relación de «m».

Al elegir los puntos del borde en que vamos a estudiar la deformación angular de la losa hay que considerar varios factores.

Para expresar la distribución real de momento a lo largo del borde es necesario tomarlo como la suma de varios momentos de distribución sinusoidal.

Por ejemplo el profesor K. Girkmann [12] al estudiar el caso de una losa cua-

drada perfectamente empotrada, en todo su contorno, bajo la acción de carga repartida uniformemente, toma cuatro incógnitas por lado (para carga simétrica) estudiando la influencia de hasta la 7ª armónica y obtiene los valores siguientes máximos para las armónicas.

$$X_1 = -0.3686 \frac{4\ qa^2}{\pi^3} \ldots (100\%) \qquad X_5 = +0.0182 \frac{4\ qa^2}{\pi^3} \ldots\ldots (4.94\%)$$

$$X_3 = -0.0377 \frac{4\ qa^2}{\pi^3} \ldots (10.2\%) \qquad X_7 = -0.0079 \frac{4\ qa^2}{\pi^3} \ldots\ldots (2.14\%)$$

Se puede ver que el valor que corresponde al máximo de la armónica fundamental (X_1) es mucho más grande que los correspondientes a las armónicas de orden superior. Pero al mismo tiempo puede observarse que los valores correspondientes a la 3ª y 5ª armónica tienen entre sí una diferencia mucho menor.

Estudiando separadamente la influencia de las diversas armónicas sobre la deformación angular en distintos puntos de los lados adyacentes, se puede establecer que mientras mayor es el número de armónicas que componen el momento aplicado a un lado tanto mayor es el corrimiento del punto de mayor ángulo de rotación $\frac{\partial w}{\partial x}$ ó $\frac{\partial w}{\partial y}$ de los lados adyacentes hacia el lado en que se aplica el momento.

Esto significa que si tomamos un punto muy cerca del lado considerado, la deformación angular $\frac{\partial w}{\partial x}$ ó $\frac{\partial w}{\partial y}$ provocada en él por la armónica $n = 1$ puede ser del mismo orden que la deformación angular que provoca la armónica $n = 3$.

Limitándonos al estudio de sólo tres armónicas la mejor ubicación de los puntos elegidos para definir la forma de la repartición de momentos es en los tercios y en el centro de cada lado.

Con esta disposición obtendremos además la ventaja de que la influencia de la armónica $n = 3$ en el borde en que la aplicamos aparece solamente en la ecuación escrita para el punto central, lo que nos permite en muchos casos, como vamos a ver más tarde, reducir el problema a la solución simultánea de sólo 8 ecuaciones con 8 incógnitas.

Tomando puntos de referencia y signos positivos para los momentos y los ángulos según la Fig. 9, se puede, utilizando los valores de α, β, γ indicados en las tablas 1, 2 y 3 para **m = 1**, escribir las 12 ecuaciones análogas a las 4 ecuaciones (9) a (12).

Punto a:

$$+ 0.980\ M_a' + 0.333\ M_a''' + 0.186\ M_b' + 0.287\ M_c' + 0.067\ M_c'' - 0.014\ M_c''' +$$
$$+ 0.287\ M_d' + 0{,}067\ M_d'' - 0.014\ M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_a^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_a \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Punto 1.

$$+0.849M_a' + 0.433M_a'' + 161M_b' + 0.009M_b'' + 0.344M_c' + 0.129M_c'' - 0.045M_c'''$$
$$+0.196M_d' + 0.030M_d'' - 0.004M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_1^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_1 \ldots\ldots \quad (16)$$

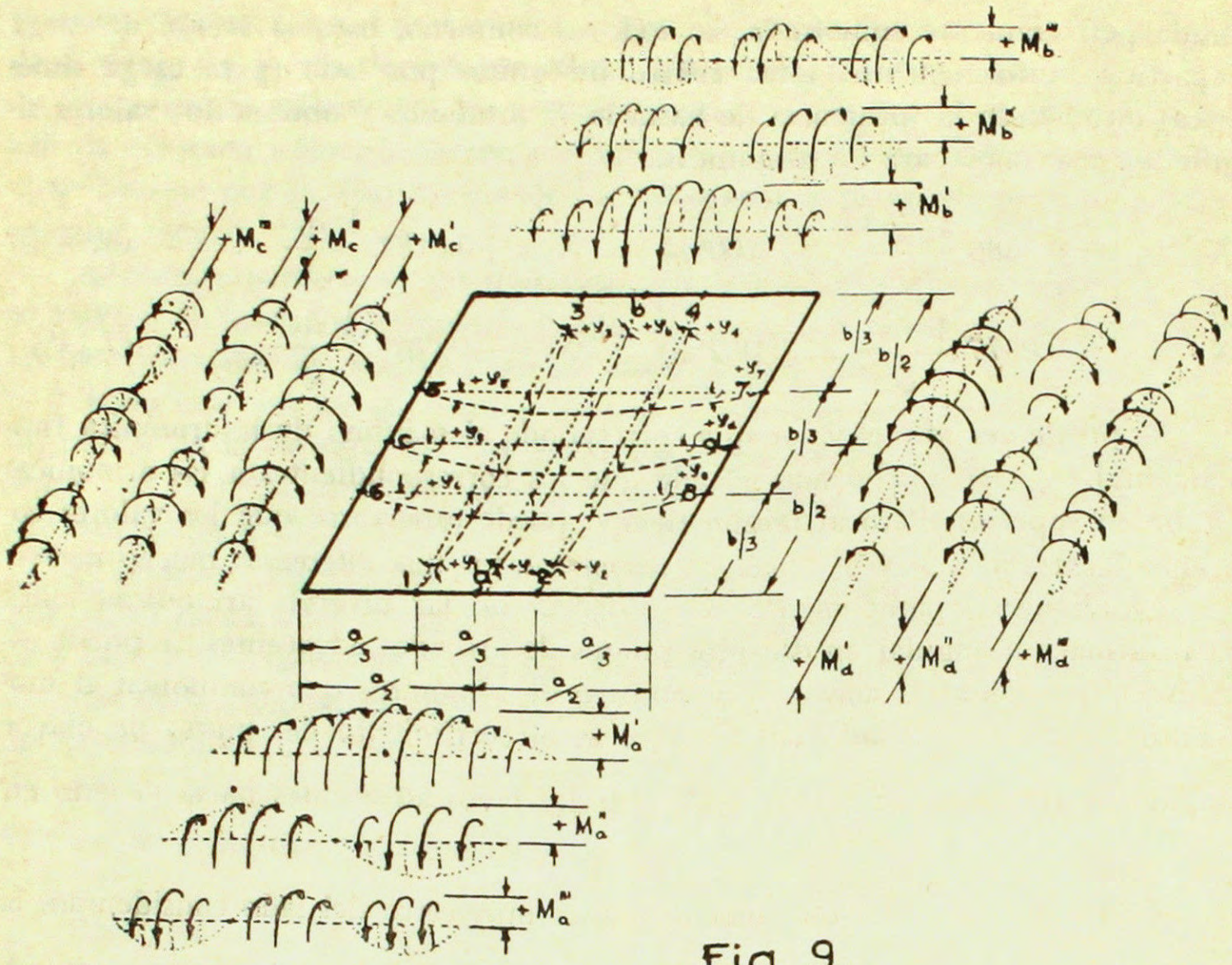

Fig. 9

Punto 2.

$$+0.849M_a' - 0.433M_a'' + 0.161M_b' - 0.009M_b'' + 0.196M_c' + 0.030M_c'' - 0.004M_c''' + 0.344\,M_d' + 0.129M_d'' - 0.045M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_2^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Punto b.

$$+0.186\,M_a' + 0.980\,M_b' + 0.333\,M_b''' + 0.287M_c' - 0.067M_c' - 0.014\,M_c''' + 0.287M_d' - 0.067M_d'' - 0.014M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_b^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Punto 3.

$$+0.161\,M_a' + 0.009\,M_a'' + 0.849\,M_b' + 0.433M_b'' + 0.344M_c' - 0.129M_c'' - 0.045M_c''' + 0.196M_d' - 0.030M_d'' - 0.004M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_3^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_3 \quad \ldots \quad (19)$$

Punto 4.

$$+0.161M_a' - 0.009M_a'' + 0.849\,M_b' - 0.433\,M_b'' + 0.196\,M_c' - 0.030\,M_c'' - 0.004M_c''' + 0.344M_d' - 0.129M_d'' - 0.045M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_4^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_4 \quad \ldots (20)$$

Punto c.

$$+0.287M_a' + 0.067M_a'' - 0.014M_a''' + 0.287\,M_b' + 0.067\,M_b'' - 0.014\,M_b''' + 0.980M_c' + 0.333\,M_c''' + 0.186\,M_d' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_c^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Punto 5.

$$+0.196M_a' + 0.030M_a'' - 0.004M_a''' + 0.344M_b' + 0.129\,M_b'' - 0.045\,M_b''' + 0.849M_c' - 0.433M_c'' + 0.161M_d' - 0.009M_d'' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_5^{\circ} = \frac{2k\pi}{a}\varphi_5 \quad \ldots \quad (22)$$

Punto 6.

$$+0.344M_a' + 0.129M_a'' - 0.045M_a''' + 0.196M_b' + 0.030M_b'' - 0.004M_b'''$$
$$+0.849M_c' + 0.433M_c'' + 0,161M_d' + 0.009M_d'' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_6^o = \frac{2k\pi}{a}\varphi_6 \quad . . . (23)$$

Punto d.

$$+0.287M_a' - 0.067M_a'' - 0.014M_a''' + 0.287M_b' - 0.067M_b'' - 0.014M_b'''$$
$$+0.186M_c' + 0.980M_d' + 0.333M_d''' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_d^o = \frac{2k\pi}{a}\varphi_d \quad . . . . . (24)$$

Punto 7.

$$+0.196M_a' - 0.030M_a'' - 0.004M_a''' + 0.344M_b' - 0.129M_b'' - 0.045M_b'''$$
$$+0.161M_c' - 0.009M_c'' + 0.849M_d' - 0.433M_d'' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_7^o = \frac{2k\pi}{a}\varphi_7 \quad . . (25)$$

Punto 8.

$$+0.344M_a' - 0.129M_a'' - 0.045M_a''' + 0.196M_b' - 0.030M_b'' - 0.004M_b'''$$
$$+0.161M_c' + 0.009M_c'' + 0.849M_d' + 0.433M_d'' + \frac{2k\pi}{a}\varphi_8^o = \frac{2k\pi}{a}\varphi_8 \quad . . (26)$$

Las ecuaciones para cualquier valor de «m» pueden ser escritas en la misma forma.

Analizando las ecuaciones (15) a (26) se puede ver que los coeficientes de las incógnitas M_a''', M_b''', M_c''', M_d''' tienen valores relativamente grandes, gracias a la elección hecha para la ubicación de los puntos, solamente en las ecuaciones (15), (18, (21), (24), que corresponden a los puntos «a», «b», «c», «d».

Tomando en cuenta que el valor absoluto de M''' es menor que M'' y menor que M', se pueden considerar sólo las ecuaciones que corresponden a los puntos «1» a «8» para la obtención de M' y M'', haciendo en ellas $M''' = 0$.

Conociendo M' y M'' y substituyendo sus valores en las ecuaciones para «a», «b», «c», «d» se obtienen los M'''.

De esta manera el sistema de 12 ecuaciones a resolver queda reducido a un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas.

Resolviendo las ecuaciones para los puntos «1» a «8» en forma de expresar «M» en función de φ obtendremos las ecuaciones (27) a (34) análogas a las (9) a (12).

$$\frac{a}{2k\pi}M_a' = +0.742(\varphi_1 - \varphi_1^o) + 0.742(\varphi_2 - \varphi_2^o) - 0.048(\varphi_3 - \varphi_3^o) -$$
$$- 0.048(\varphi_4 - \varphi_4^o) - 0.043(\varphi_5 - \varphi_5^o) - 0.329(\varphi_6 - \varphi_6^o) - 0.043(\varphi_7 - \varphi_7^o) -$$
$$- 0.329(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad . . . . . (27)$$

$$\frac{a}{2k\pi}M_a'' = +1,240(\varphi_1 - \varphi_1^o) - 1.240(\varphi_2 - \varphi_2^o) - 0.009(\varphi_3 - \varphi_3^o) +$$
$$+ 0.009(\varphi_4 - \varphi_4^o) + 0.012(\varphi_5 - \varphi_5^o) - 0.277(\varphi_6 - \varphi_6^o) - 0.012(\varphi_7 - \varphi_7^o) +$$
$$+ 0.277(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad . . . . . (28)$$

$$\frac{a}{2k\pi}M_b' = -0.048(\varphi_1 - \varphi_1^o) - 0.048(\varphi_2 - \varphi_2^o) + 0.742(\varphi_3 - \varphi_3^o) +$$
$$+ 0.742(\varphi_4 - \varphi_4^o) - 0.329(\varphi_5 - \varphi_5^o) - 0.043(\varphi_6 - \varphi_6^o) - 0.329(\varphi_7 - \varphi_7^o) -$$
$$- 0.043(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad . . . . . (29)$$

$$\frac{a}{2k\pi} M_b'' = -0.009\,(\varphi_1 - \varphi_1^o) + 0.009\,(\varphi_2 - \varphi_2^o) + 1.240\,(\varphi_3 - \varphi_3^o) - -1.240\,(\varphi_4 - \varphi_4^o) - 0.277\,(\varphi_5 - \varphi_5^o) + 0.012\,(\varphi_6 - \varphi_6^o) + 0.277\,(\varphi_7 - \varphi_7^o) - -0.012\,(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad \ldots \quad (30)$$

$$\frac{a}{2k\pi} M_c' = -0.329\,(\varphi_1 - \varphi_1^o) - 0.043\,(\varphi_2 - \varphi_2^o) - 0.329\,(\varphi_3 - \varphi_3^o) - -0.043(\varphi_4 - \varphi_4^o) + 0.742\,(\varphi_5 - \varphi_5^o) + 0{,}742\,(\varphi_6 - \varphi_6^o) - 0.048\,(\varphi_7 - \varphi_7^o) - -0.048\,(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad \ldots \quad (31)$$

$$\frac{a}{2k\pi} M_c'' = -0.277\,(\varphi_1 - \varphi_1^o) + 0.012\,(\varphi_2 - \varphi_2^o) + 0.277\,(\varphi_3 - \varphi_3^o) - -0.012(\varphi_4 - \varphi_4^o) - 1.240\,(\varphi_5 - \varphi_5^o) + 1.240\,(\varphi_6 - \varphi_6^o) + 0.009\,(\varphi_7 - \varphi_7^o) - -0.009\,(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad \ldots \quad (32)$$

$$\frac{a}{2k\pi} M_d' = -0.043\,(\varphi_1 - \varphi_1^o) - 0.329(\varphi_2 - \varphi_2^o) - 0.043\,(\varphi_3 - \varphi_3^o) - -0.329(\varphi_4 - \varphi_4^o) - 0.048\,(\varphi_5 - \varphi_5^o) - 0.048\,(\varphi_6 - \varphi_6^o) + 0.742\,(\varphi_7 - \varphi_7^o) + 0.742\,(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad \ldots \quad (33)$$

$$\frac{a}{2k\pi} M_d'' = +0.012\,(\varphi_1 - \varphi_1^o) - 0.277\,(\varphi_2 - \varphi_2^o) - 0.012\,(\varphi_3 - \varphi_3^o) + +0.277(\varphi_4 - \varphi_4^o) + 0.009\,(\varphi_5 - \varphi_5^o) - 0.009\,(\varphi_6 - \varphi_6^o) - 1.240\,(\varphi_7 - \varphi_7^o) + +1.240\,(\varphi_8 - \varphi_8^o) \quad \ldots \quad (34)$$

Si igualamos «φ_1» a «φ_8» a «0» en las ecuaciones anteriores (empotramiento perfecto) y conociendo φ^o se pueden obtener los valores de «C» correspondientes al momento de empotramiento perfecto, para la acción de cualquier carga.

A diferencia con las ecuaciones (9) (12), se pueden en este caso obtener también los momentos para condiciones de empotramiento asimétricas. Por ejemplo, para el caso en que dos lados adyacentes sean empotrados y los otros dos libremente apoyados, etc.

Como ejemplo vamos a calcular ahora el momento de empotramiento perfecto para una losa encastrada en todo su contorno bajo la acción de una carga repartida.

En este caso:

$$M_a' = M_b' = M_c' = M_d'$$

$$M_a'' = M_b'' = M_c'' = M_d' = 0$$

$$\varphi_i^o \text{ a } \varphi_8^o = (0.01371 \times 0.866)\,\frac{qa^3}{k} = 0.01187\,\frac{qa^3}{k} \qquad \varphi_1 \text{ a } \varphi_8 = 0$$

$$\varphi_a^o \text{ a } \varphi_d^o = (0.01371 - 0.00023)\,\frac{qa^3}{k} \qquad \varphi_a \text{ a } \varphi_d = 0$$

$$M'_a = \frac{2k\pi}{a} \times (-0.644) \times 0.01187\,\frac{qa^3}{k} = \underline{-0.0480\,qa^2}$$

de ecuación (15) tomando $M_a''' = M_b''' = M_c''' = M_d'''$

$$M_a''' = \frac{1}{0.305}\,(-2\pi \times 0.01348 + 0.0480 \times 1.740)\,qa^2 = \underline{-0.0037\,qa^2}$$

entonces en el centro, punto «a» de la Fig. 9, tendremos $M_{centr} = -0.0517\ qa^2$ valor que es casi exactamente igual al valor obtenido por Timoshenko ($-0.0513\ qa^2$).

Queremos mencionar aquí que no hay que exagerar la importancia de la absoluta coincidencia de valores obtenidos en este trabajo con los que obtuvieron otros autores en los mismos casos, porque como puede comprobarse fácilmente los valores de φ^o dados por varios autores bien conocidos como Marcus, Lewe [13], etc., tampoco coinciden exactamente entre sí siendo corriente observar diferencias de 1-1.5%.

III. METODO DE LOS GRADOS DE EMPOTRAMIENTO APLICADO A LA SOLUCION DEL PROBLEMA DE LOSAS CRUZADAS CONTINUAS

Si consideramos un campo de losas continuas, con una cierta carga sobre ellas, se podría, tomando en cuenta la relación de los lados «m», escribir para cada lado tres ecuaciones para los tres momentos M', M'' y M''', tal como lo hicimos para la losa cuadrada.

Sabiendo además los ángulos φ_o que produce la carga en las losas consideradas como simplemente apoyadas e igualando las deformaciones angulares de los bordes comunes obtendremos un sistema de ecuaciones cuya solución nos dará todos los valores de los momentos en los apoyos.

Este método de cálculo, considerado desde un punto de vista práctico, no tiene valor, porque ya para una sola losa empotrada elásticamente deberemos resolver un sistema de 8 a 12 ecuaciones y en consecuencia para un campo de losas continuas la cantidad de ecuaciones e incógnitas puede fácilmente llegar a 30 o más.

La dificultad de resolver sistemas de numerosas ecuaciones puede evitarse, en este caso, empleando el método de los grados de empotramiento según la aplicación, hecha por el profesor Hickerson para los sistemas de elementos reticulares.

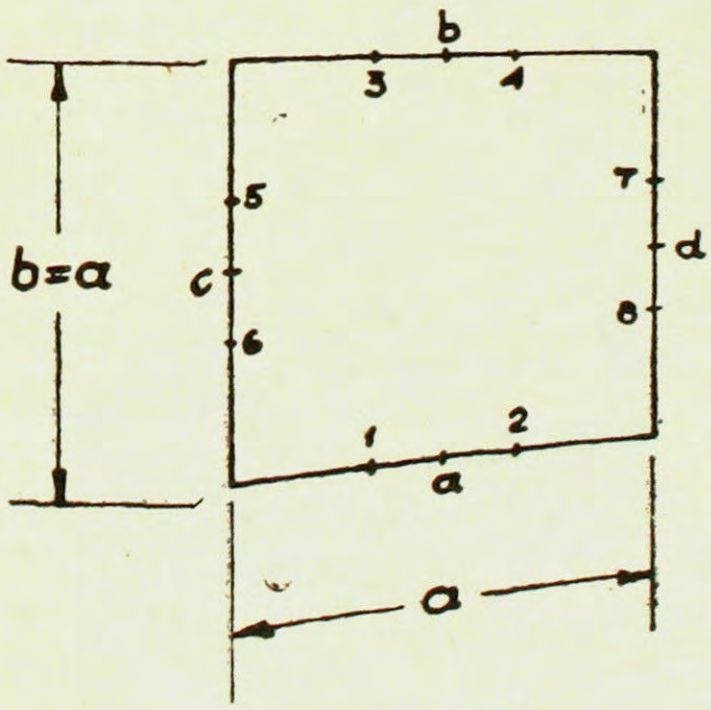

Fig. 10

A continuación expondremos la aplicación del método antes mencionado al cálculo de losas. Para la deducción de las fórmulas seguiremos exactamente el camino planteado por el profesor Hickerson para las vigas.

Para simplificar el desarrollo de la teoría de cálculo tomaremos otra vez un caso definido el de «m» = 1 (losa cuadrada).

a) Relación entre los ángulos de rotación y los grados de empotramiento.

En Fig. 10 vemos una losa cuadrada (m=1) cuyos lados a, b, c, d, están elásticamente empotrados.

Su deformación está definida según

las ecuaciones (27) a (34) si conocemos sus momentos de empotramiento y sus ángulos de rotación φ^o.

Primero trataremos el caso en que la losa está descargada, es decir: $\varphi^o = 0$.

Examinando la deformación angular del lado «a» según las ecuaciones (27) y (28) se podrá ver que φ_1 y φ_2 son máximos si M_a' y M_a'' son iguales a cero, e igual a cero si $M_a' = C_a'$ y M_a'' C_a'' (si no tomamos en cuenta la influencia de los otros lados).

Si llamamos «*f*» el grado de empotramiento, que caracteriza el grado de libertad para la rotación φ y le asignamos un valor máximo igual a 1 para empotramiento perfecto, se tendrá:

$$f = 1 - \frac{\varphi}{\varphi_{max}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

En esta fórmula se cumple que si tenemos empotramiento perfecto $\varphi = 0$ y $f = 1$; si hay apoyo libre $\varphi = \varphi_{max}$ y $f = 0$.

Entonces «*f*» variará entre cero y uno para los diferentes grados de empotramiento.

Si suponemos que todos los puntos de un lado durante la deformación sufren giros angulares de la misma proporción podremos definir con un solo valor «*f*» el estado de cada borde.

Empleando la notación antes citada podemos escribir para los cuatro lados de una losa:

$$f_a = 1 - \frac{\varphi_1}{\varphi_{1\,max}} \qquad f_b = 1 - \frac{\varphi_3}{\varphi_{3\,max}} \qquad \text{etc.} \qquad \text{para}$$

$$\text{o'}\ f_a = 1 - \frac{\varphi_2}{\varphi_{2\,max}} \qquad \text{o'}\ f_b = 1 - \frac{\varphi_4}{\varphi_{4\,max}} \qquad «f_c» \text{ y } «f_d»$$

en otra forma:

$$\varphi_{1\,max} = \frac{\varphi_1}{(1 - f_a)} \qquad \varphi_{2\,max} = \frac{\varphi_2}{(1 - f_a)} \qquad \varphi_{3\,max} = \frac{\varphi_3}{(1 - f_b)}$$

$$\varphi_{4\,max} = \frac{\varphi_4}{(1 - f_b)} \qquad \text{etc.}$$

Considerando en las ecuaciones (27) a (34) que todos los momentos son iguales a cero y que la losa está descargada, se podrían reemplazar los valores de φ de las ecuaciones por φ_{max} expresado en función de « *f* »,

Procediendo en esta forma obtendremos el sistema de ecuaciones (36) a (43) que establece la relación entre los valores «*f*» (grados de empotramiento) y los valores φ ángulos de rotación del borde.

$$+ \frac{0.742}{(1 - f_a)} \varphi_1 + \frac{0.742}{(1 - f_a)} \varphi_2 - 0.048\, \varphi_3 - 0.048\, \varphi_4 - 0.043\, \varphi_5 - 0.329\, \varphi_6 -$$

$$- 0.043\, \varphi_7 - 0.0329\, \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

$$+ \frac{1.240}{(1-f_a)} \varphi_1 - \frac{1.240}{(1-f_a)} \varphi_2 - 0.009\, \varphi_3 + 0.009\, \varphi_4 + 0.012\, \varphi_5 - 0.277\, \varphi_6 -$$

$$- 0.012\, \varphi_7 + 0.277\, \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

$$- 0.048\, \varphi_1 - 0.048\, \varphi_2 + \frac{0.742}{(1-f_b)} \varphi_3 + \frac{0.742}{(1-f_b)} \varphi_4 - 0.329\, \varphi_5 - 0.043\, \varphi_6 -$$

$$- 0.329\, \varphi_7 - 0.043\, \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

$$- 0.009\, \varphi_1 + 0.009\, \varphi_2 + \frac{1.240}{(1-f_b)} \varphi_3 - \frac{1.240}{(1-f_b)} \varphi_4 - 0.277\, \varphi_5 + 0.012\, \varphi_6 +$$

$$+ 0.277\, \varphi_7 - 0.012\, \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

$$- 0.329\, \varphi_1 - 0.043\, \varphi_2 - 0.329\, \varphi_3 - 0.043\, \varphi_4 + \frac{0.742}{(1-f_c)} \varphi_5 + \frac{0.742}{(1-f_c)} \varphi_6 -$$

$$- 0.048\, \varphi_7 - 0.048\, \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

$$- 0.277\, \varphi_1 + 0.012\, \varphi_2 + 0.277\, \varphi_3 - 0.012\, \varphi_4 - \frac{1.240}{(1-f_c)} \varphi_5 + \frac{1.240}{(1-f_c)} \varphi_5 +$$

$$+ 0.009\, \varphi_7 - 0.009\, \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

$$- 0.043\, \varphi_1 - 0.329\, \varphi_2 - 0.043\, \varphi_3 - 0.329\, \varphi_4 - 0.048\, \varphi_5 - 0.048\, \varphi_6 +$$

$$+ \frac{0.742}{(1-f_d)} \varphi_7 + \frac{0.742}{(1-f_d)} \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

$$+ 0.012\, \varphi_1 - 0.277\, \varphi_2 - 0.012\, \varphi_3 + 0.277\, \varphi_4 + 0.009\, \varphi_5 - 0.009\, \varphi_6 -$$

$$- \frac{1.240}{(1-f_d)} \varphi_7 + \frac{1.240}{(1-f_d)} \varphi_8 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

b) Definición de rigidez.

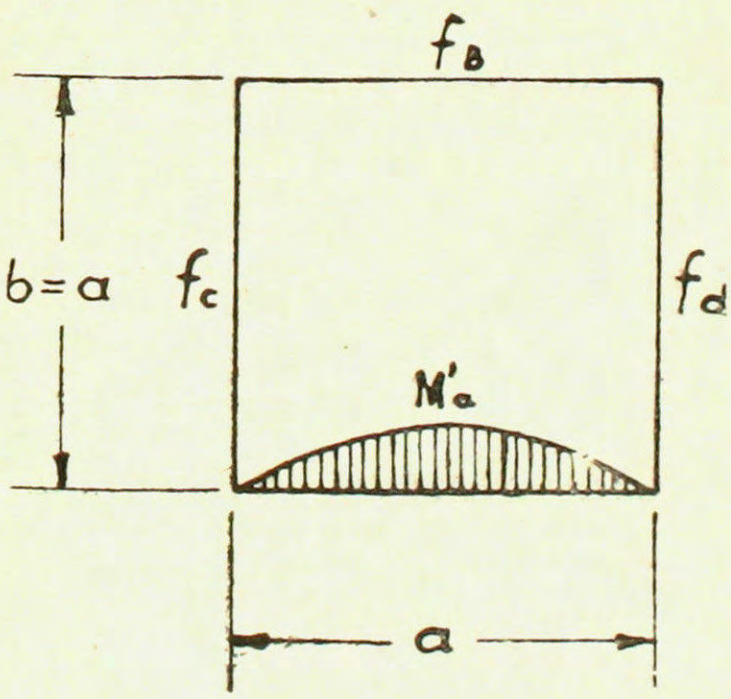

Fig. 11

Vamos a estudiar ahora el caso en que la losa está solicitada a lo largo del borde «a» con un momento M_a' mientras los bordes «b», «c», «d», tienen ciertos grados de empotramiento «f_b», «f_c», «f_d» (ver Fig. 11), para establecer las fórmulas que nos definen los momentos en los bordes M_b', M_c', M_c'', M_d', M_d'' como consecuencia de la acción de M_a'.

El valor de M_b'', momento que aparece en el borde «b» y que es producido por la desigualdad entre los grados de empotramiento «f_c» y «f_d» puede despreciarse, porque en el caso más desfavorable (si $f_b = f_c = 1$ y $f_d = 0$) tiene un valor que alcanza sólo a un 2.7% del valor de M_a'.

El despreciar el momento M_b'' equivale a la condición de igualidad entre φ_3 y φ_4.

Para obtener los valores de los momentos que nos interesa vamos a proceder en la forma siguiente:

Si resolvemos el sistema de ecuaciones (38) a (43) podremos determinar los valores φ_2, $\varphi_3 = \varphi_4$, φ_5, φ_6, φ_7, y φ_8 como funciones del ángulo de rotación φ_1 y de los grados de empotramiento « f ».

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1}{A}\Big[-1.3988-0.2983\, f_b-0.2855\, f_c-0.1594\, f_d+0.0130\, f_c f_d+$$
$$+0.1520 f_b f_d+0.1349\, f_b f_c-0.0123\, f_c^2+0.0030\, f_c^2 f_d+0.0112\, f_b f_c^2-0.0017\, f_b f_c^2 f_d-$$
$$-0.0010\, f_b f_c f_d^2+0.009\, f_c f_d^2+0.0025\, f_b f_c f_d-0.0006\, f_d^2+$$
$$+0.0006 f_b f_d^2\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \frac{\varphi_1}{A}\Big[-0.2671+0.2671\, f_b+0.0736\,(f_c+f_d-f_b f_c-f_b f_d)-$$
$$-0.0011\,(f_c f_d-f_b f_c f_d)+0.0014\,(f_c^2-f_b f_c^2+f_d^2-f_b f_d^2)-$$
$$-0.0006\,(f_c f_d^2-f_b f_c f_d^2+f_c^2 f_d-f_b f_c^2 f_d)+0.0003\,(f_c^2-$$
$$-f_c^2 f_d+f_d^2-f_c f_d^2-f_b f_c^2+f_b f_c^2 f_d-f_b f_d^2+f_b f_c f_d^2)\Big] \quad \ldots \quad (45)$$

$$\varphi_5 = \frac{\varphi_1}{A}\Big[-0.3242+0.0526\, f_b+0.3224\, f_c+0.0159\, f_d-0.0129\, f_c f_d-$$
$$-0.0568\, f_b f_c-0.0052\, f_b f_d+0.0008\, f_d^2-0.0011\, f_c f_d^2-0.0005\, f_b f_d^2+$$
$$+0.0007\, f_b f_c f_d^2+0.0020\, f_c^2-0.0030\, f_c^2 f_d+0.0041\, f_b f_c^2+$$
$$+0.0049\, f_b f_c f_d\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

$$\varphi_6 = \frac{\varphi_1}{A}\Big[-0.5681-0.0694\, f_b+0.5171\, f_c-0.0608 f_d+0.0674 f_c f_d+0.1141 f_b f_c+$$
$$+0.0405\, f_b f_d-0.0020\, f_d^2+0.0025\, f_c f_d^2+0.0021\, f_b f_d^2-0.0063\, f_c^2 f_d+$$
$$+0.0507\, f_c^2-0.0444\, f_b f_c^2-0.0410\, f_b f_c f_d-0.0005\, f_c^2 f_d^2-$$
$$-0.0025\, f_b f_c f_d^2\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

$$\varphi_7 = \frac{\varphi_1}{A}\Big[-0.3242+0.0526 f_b+0.0159\, f_c+0.3224.\, f_d-0.0129\, f_c f_d-$$
$$-0.0052\, f_b f_c-0.0568\, f_b f_d+0.0008\, f_c^2-0.0011\, f_c^2 f_d-0.0005\, f_b f_c^2+$$
$$+0.0007\, f_b f_c^2 f_d+0.0020\, f_d^2-0.0030\, f_c f_d^2+0.0041\, f_b f_d^2+$$
$$+0.0049\, f_b f_c f_d\Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

$$\varphi_8 = \frac{\varphi_1}{A}\Big[-0.5681-0.0694\, f_b-0.0608\, f_c+0.5171\, f_d+0.0674\, f_c f_d+$$

$$+0.0405\, f_b\, f_c + 0.1141\, f_b\, f_d - 0.0020\, f_c^2 - 0.0063\, f_c\, f_d^2 - 0.0444\, f_b\, f_d^2$$
$$+0.0025\, f_c^2\, f_d + 0.0021\, f_b\, f_c^2 + 0.0507\, f_d^2 - 0.0410\, f_b\, f_c\, f_d -$$
$$\left. -0.0005\, f_c^2\, f_d^2 - 0.0025\, f_b\, f_c^2\, f_d \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

en que

$$A = -1.3988 - 0.2983\, f_b - 0.1594\, f_c - 0.2855\, f_d + 0.0130\, f_c\, f_d + 0.1520\, f_b\, f_c +$$
$$+0.1349\, f_b\, f_d - 0.0123\, f_d^2 + 0.0030\, f_c\, f_d^2 + 0.0112\, f_b\, f_d^2 - 0.0017\, f_b\, f_c\, f_d^2 -$$
$$-0.0010\, f_b f_c^2 f_d + 0.0009\, f_c^2 f_d + 0.0025\, f_b f_c f_d - 0.0006\, f_c^2 + 0.0006\, f_b f_c^2 \ldots\ldots (50)$$

si introducimos ahora los valores de φ_2 a φ_8 en la ecuación (27), suponiendo siempre que $\varphi^o = 0$, obtendremos:

$$\frac{a}{2k\pi}\, M_a' = \frac{\varphi_1}{A} \Big[-1.6490 - 0.4272\, f_b - 0.5019\, f_c - 0.5019\, f_d - 0.0240\, f_c\, f_d +$$
$$+ 0.1718\, f_b\, f_c + 0.1718\, f_b\, f_d - 0.0256\, f_d^2 + 0.0044\, f_c\, f_d^2 +$$
$$+ 0.0225\, f_b\, f_d^2 - 0.0012\, f_b\, f_c\, f_d^2 - 0.0012\, f_b\, f_c^2\, f_d + 0.0044\, f_c^2\, f_d +$$
$$+ 0.0303\, f_b\, f_c\, f_d - 0.0256\, f_c^2 + 0.0225\, f_b\, f_c^2 + 0.0003\, f_c^2\, f_d^2 \Big] \quad . . (51)$$

esta fórmula nos da la expresión del momento aplicado en función del ángulo de rotación φ_1 del mismo lado y de los grados de empotramiento de los otros tres lados.

Se podría también expresar M_a' como una función de φ_2; para esto bastaría cambiar en la fórmula (51) los valores «f_c» por «f_d» y los valores «f_d» por «f_c.»

Los valores para M_a' obtenidos en estos dos casos acusarán una pequeña diferencia si $f_c \neq f_d$ que alcanza su valor máximo cuando uno de los dos grados de empotramiento es igual a cero y el otro igual a uno.

Para obtener la mayor exactitud en la tabulación es preferible tomar el término medio de los M_a' obtenidos como funciones de φ_1 y φ_2. En el caso en que $f_b = f_c = f_d = o$ y que corresponde a la losa simplemente apoyada en su contorno, tendremos el valor mínimo de M_a'

$$\frac{a}{2k\pi}\, M_{a\,min}' = + \frac{1.6490}{1.3988}\, \varphi_1 = +1.179\, \varphi_1$$

Si $f_b = f_c = f_d = 1$ (caso de empotramiento perfecto de los tres lados opuestos) tendremos el valor máximo de M_a'.

$$\frac{a}{2k\pi}\, M_{a\,máx}' = + \frac{2.7296}{1.8396}\, \varphi_1 = +1.484\, \varphi_1$$

Si introducimos la notación siguiente en que:

«*S*»: *es la rigidez, y corresponde al momento que produce una rotación angular, que tiene a lo largo del borde considerado la misma forma que el momento que la provoca, y cuyo valor máximo es igual a 1.*

Entonces, en el caso de la armónica fundamental, φ_1 tiene que ser igual a 0.866 (sen 60º $\times$ 1).

y $$S'_{min} = 1.021 \frac{2k\pi}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (52)$$

$$S'_{max} = 1.285 \frac{2k\pi}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

en la tabla Nº 1 anotamos los valores de α'_1 que representan las rotaciones angulares del centro de la losa simplemente apoyada bajo la acción de $M' = +1$, para el caso m=1.

Conociendo el valor del momento M_a' se puede escribir

$$\varphi_a = \alpha_1' \cdot M_a' \quad \varphi_a = 0.980 \frac{a}{2k\pi} M_a' \quad \text{si } \varphi_a = 1 \quad M_a' = S'_{min} \quad \text{y} \quad S'_{min} = 1.0204 \frac{2k\pi}{a}$$

valor que es igual al obtenido en (52).

Introduciendo varios valores de f_b, f_c, f_d en la fórmula (51), y tomando $\varphi_1 = 0.866$, se pueden tabular las rigideces S'.

En el caso general, la suposición de que la acción del momento en el borde, según la armónica fundamental y la deformación angular del mismo borde se distribuyen en igual forma, no se cumple estrictamente.

La forma de distribución depende de la condición del empotramiento de los lados b, c, d.

Solamente en el caso en que todos los lados están simplemente apoyados, la suposición es absolutamente exacta.

La máxima diferencia se produce si $f_c = 1$ y $f_b = f_d = o$.

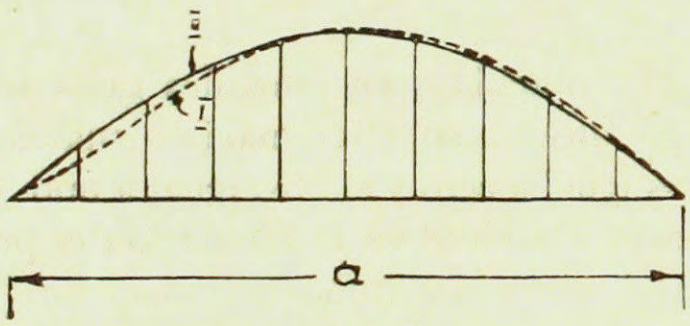

Fig. 12

En la Fig. 12 están trazadas las dos curvas (I) y (II) de deformaciones angulares a lo largo del lado «a» para el caso en que actúa M_a'

La curva (I) está calculada exactamente a base de la ecuación (2), tomando en cuenta M_c', M_c'' y M_c''', y la curva (II) corresponde al caso en que se adopta una distribución sinusoidal, con un valor máximo en el centro igual a $\frac{1}{0.866}$ del término medio de los valores de φ en los tercios de «a»

Como podemos ver, la diferencia es muy pequeña. Lo mismo podría comprobarse para el caso en que actúan los momentos M_a'' y M_a'''.

Comparando las rigideces de la losa para m=1 con las rigideces de una viga según la definición de rigidez dada por Hickerson, se podrá ver que la losa es mucho más rígida, pero la variación entre S_{min} y S_{max} es menor que en las vigas.

Para la losa, tomando $K = EI$

$$S_{min} = 6.412 \frac{E\,I}{a} \qquad S_{max} = 8.070 \frac{E\,I}{a}$$

Para la viga (ver Hickerson) se cumple:

$$S_{min} = 3 \frac{E\,I}{a} \qquad S_{max} = 4 \frac{E\,I}{a}$$

En forma parecida a la empleada en el caso de la aplicación de M_a' se podrían también calcular las rigideces para M_a'' y M_a''', pero nosotros vamos a limitarnos, en la definición de grado de empotramiento sólo a la rigidez en función de M_a'.

c) Coeficiente de transporte.

No menos importancia que la definición de rigidez tiene la definición de los coeficientes de transporte — es decir *los momentos que aparecen en los bordes b, c, d, como consecuencia de la acción del momento* M_a'

Si introducimos los valores obtenidos para φ_2 a φ_8 de las ecuaciones (44) a (49) en las fórmulas (29, 31, 32, 33, 34) para la losa descargada, podremos obtener las expresiones para M_b', M_c', M_c'', M_d', M_d'' que toman la forma

$$\frac{a}{2k\pi} M_b' = \frac{E}{A} \varphi_1 \qquad \frac{a}{2k\pi} M_c' = \frac{F}{A} \varphi_1 \qquad \frac{a}{2k\pi} M_c'' = \frac{G}{A} \varphi_1$$

si tomamos el valor de M_a' de la fórmula (51) y dividimos M_b', M_c' y M_c'' por él, obtendremos:

$$\frac{M_b'}{M_a'} = \frac{E}{\text{el numerador de (51)} = H}$$ etc. para M_c' y M_c'' entonces

$$M_b' = \frac{1}{H} \Big[+ 0.3963 - 0.1092(f_c + f_d) - 0.0024\,(f_d^2 + f_c^2) + $$
$$+ f_c\, f_d\,(0.0017 + 0.0013\, f_d + 0.0013\, f_c) \Big] f_b\, M_a' \quad \ldots \quad (54)$$

$$M_c' = \frac{1}{H} \Big[+ 0.6623 + 0.0333 f_d + 0.0125 f_b + 0.0008 f_d^2 - 0.0011\, f_b\, f_d^2 -$$
$$- 0.0071 f_c f_d - 0.0263 f_b f_d + 0.0392 f_c - 0.0301 f_b f_c \Big] f_c\, M_a' \quad \ldots \quad (55)$$

$$M_c'' = \frac{1}{H} \Big[+ 0.3023 + 0.0952 f_d + 0.1514 f_b + 0.0034 f_d^2 - 0.0032 f_b f_d^2 +$$
$$+ 0.0006 f_b f_c f_d - 0.0046 f_c f_d - 0.0569 f_b f_d + 0.0610 f_c -$$
$$- 0.0607 f_b f_c - 0.0006 f_c f_d^2 \Big] f_c\, M_a' \quad \ldots \quad (56)$$

para obtener las fórmulas que definen los M_d' y M_d'' hay que cambiar en las fórmulas (55) y (56) los factores f_c por f_d y f_d por f_c respectivamente.

Procediendo de la misma manera y cargando la losa con el momento de borde M_a'' se podrían obtener los coeficientes de transporte para este caso, despreciando el factor M_b' en vez de M_b''

El momento M_a''' para la losa con m=1 da un coeficiente de transporte igual a cero.

d) Definición de los grados de empotramiento.

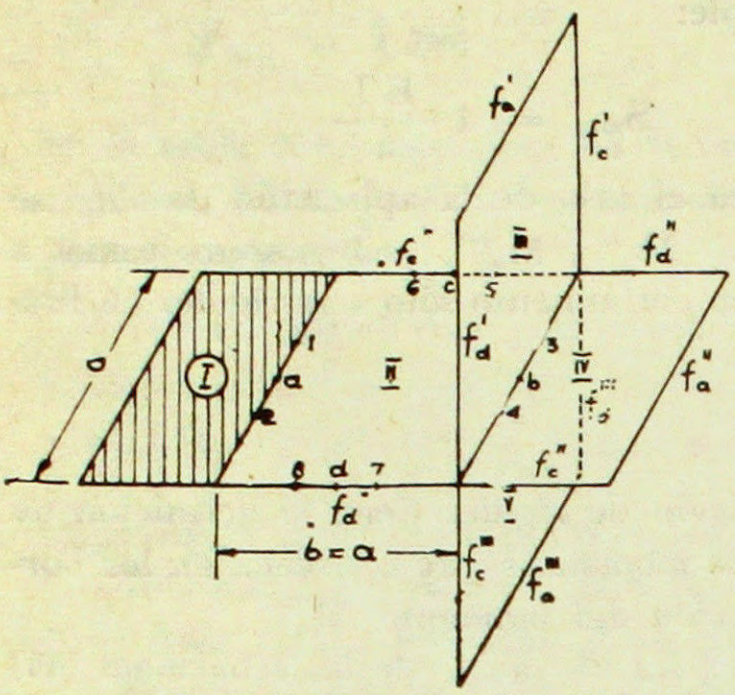

Fig. 13.

En la Fig. 13 vemos un sistema formado por varias losas I a V.

Losa II tiene para la relación de los lados el valor m=1, las otras losas tienen un valor de «m» cualquiera.

La losa I está sometida a una cierta carga que produce en todo el sistema de losas ciertos momentos de empotramiento.

Vamos a buscar la expresión para el valor de grado de empotramiento «f_b» de la losa II.

Estudiemos el equilibrio del borde «b».

Debido a la solicitación de la losa I, en el borde «b» de la losa II, aparece un cierto momento M'_b que tiene que estar en equilibrio con los momentos que a su vez inducen en este borde las losas III, IV, y V, debido a sus condiciones de apoyo.

Esta condición se escribe:

$$M_b'{}_{II} + \sum_{n=III}^{V} M'_{bn} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

Como vimos anteriormente el momento $M_b'{}_{II}$ puede ser expresado en función de φ_1 y de los coeficientes «f_b», «f_c» y «f_d» según la relación:

$$\frac{a}{2k\pi} M_b'{}_{II} = \frac{\varphi_{1\,II}}{A} L f_b = \frac{\varphi_{1\,II}}{A} \Big[+ 0.3963 - 0.1092\,(f_c + f_d) -$$

$$-0.0024\,(f_d^2 + f_c^2) + f_c f_d\,(0.0017 + 0.0013 f_d + 0.0013 f_c)\Big] f_b \quad \ldots \quad (58)$$

Los momentos de las losas adyacentes se pueden determinar conociendo φ_3 y las rigideces correspondientes de las losas III, IV y V.

Según la definición de la rigidez S hecha anteriormente

$$M'_{b\,III} = S'_{III} \cdot \frac{\varphi_{3\,II}}{0.866} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59a)$$

$$M_b'{}_{IV} = S'_{IV} \cdot \frac{\varphi_{3\,II}}{0.866} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59b)$$

$$M'_{b\,V} = S'_{V} \cdot \frac{\varphi_{3\,II}}{0.866} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (59c)$$

con ayuda de la fórmula (45) se puede expresar la relación entre $\varphi_{1\,II}$ y $\varphi_{3\,II}$ en la forma siguiente:

$$\varphi_{3\,II} = (1 - f_b)\,\frac{\varphi_{1\,II}}{A} P = \frac{\varphi_{1\,II}}{A} \Big\{ (1 - f_b)\Big[- 0.2671 + 0.0736\,(f_c + f_d)$$

$$-0.0011\, f_c f_d + 0.0017\,(f_c^2 + f_d^2) - 0.0009\,(f_c f_d^2 + f_c^2 f_d)\Big]\Big) \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

si introducimos los valores de las fórmulas (58) a (60) en la ecuación (57) obtendremos:

$$\frac{2k\pi}{a} \cdot \frac{\varphi_{1\,II}}{A}\, L\, f_b + \sum_{n=III}^{V} S'_n \cdot \frac{(1-f_b)\,P}{0.866\ A}\, \varphi_{1\,II} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

$$y\ f_b = \frac{-\sum\limits_{n=III}^{V} S'_n}{-\sum\limits_{n=III}^{V} S_n' + \frac{2k\pi}{a} \cdot \frac{L}{P}\, 0.866}$$

$$0.866\, \frac{L}{P} = -1.285 \quad \text{(ver ecuaciones 58 y 60)}$$

El valor $1.285 \frac{2k\pi}{a}$ es exactamente igual al valor de la rigidez máxima de una losa cuadrada según la ecuación (53).

Entonces podemos escribir que

$$f_b = \frac{\Sigma\, S}{\Sigma\, S + S_{\max II}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

en que ΣS es la suma de las rigideces de los elementos adyacentes.

$S_{\max II}$ es el máximo de la rigidez de la losa considerada, es decir, la que se obtiene cuando sus tres lados, a, c ,d, están encastrados y que varía sólo con el factor «m».

f_b es el grado de empotramiento del lado «b» de la losa considerada, que varía entre $o \leq f < 1$ y que no depende de la carga.

La fórmula (62) está deducida a base de las ecuaciones para una losa cuadrada pero es válida para cualquiera relación «m» de los lados.

La ΣS puede contener las rigideces de diferentes estructuras como por ejemplo losas, vigas, muros, etc., si la definición de rigidez para ellos es igual a la definición indicada anteriormente.

En igual forma pueden calcularse los grados de empotramiento f_a, f_c, f_d

e) Los momentos de empotramiento elástico.

Para completar la teoría del cálculo mediante los grados de empotramiento es necesario deducir las fórmulas que definen los momentos de borde en función de los grados de empotramiento f_a, f_b, f_c, f_d y los ángulos φ^o.

Si seguimos en la deducción de estas fórmulas el camino planteado por el profesor Hickerson para las vigas llegaremos a serias dificultades debidas a la necesidad de resolver sistemas de 8 a 12 ecuaciones en función, para el caso general, de hasta 16 constantes.

A fin de evitar al lector desarrollos penosos y que nada nuevo aportan al cálculo explicaremos solamente cómo se obtienen las fórmulas para los momentos, sin entrar en su desarrollo detallado más adelante trataremos este problema en otra forma que estimamos más clara y rápida.

Se pueden escribir las ecuaciones (36) a (43) para el caso en que los $\varphi^o \neq o$ (la losa cargada), es decir, las ecuaciones tienen que contener los términos en φ_1^o a φ_8^o.

Resolviendo estas ecuaciones para φ obtendremos expresiones para cada φ del tipo siguiente:

$$\varphi_k = \text{función } (\varphi_a^o \text{ a } \varphi_d^o,\ \varphi_1^o \text{ a } \varphi_8^o,\ f_a,\ f_b,\ f_c,\ f_d)$$

si introducimos los valores de φ_1 a φ_8 (k = 1 a 8) en las ecuaciones para momentos del tipo de las anotadas bajo el número (27) a (34) podremos obtener las fórmulas definitivas para los momentos de los bordes M_a', M_a'' etc., en una losa solicitada por una carga determinada y empotrada elásticamente.