MECÁNICA RACIONAL

CAPÍTULO XVIII

(Conclusion)

TIEMPO NECESARIO PARA VACIAR UN DEPÓSITO

Admitiremos que, durante cada intervalo de tiempo dt, el derrame se efectúa como si el movimiento estuviera permanente.

Supongamos entónces que el orificio de área Ω se encuentra en la parte mas baja del depósito. Sea, en el momento t, z la distancia, al orificio, del nivel del agua en el depósito, el volúmen de líquido que sale durante el tiempo dt es

$$m\,\Omega\sqrt{2gz}\,dt$$

El nivel en el depósito baja de dz i se tiene, si S es el área de la seccion mojada,

$$(8) \qquad S\,dz = -m\,\Omega\sqrt{2gz}\,dt$$

Sea H el valor inicial de z i T el tiempo necesario para vaciar completamente el depósito, se tendrá

$$(9) \qquad T = -\frac{1}{m\,\Omega\sqrt{2g}}\int_H^0 \frac{S\,dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{m\,\Omega\sqrt{2g}}\int_0^H \frac{S\,dz}{\sqrt{z}}$$

El tiempo T depende naturalmente de la forma del depósito, es decir de la lei de variacion de S con z.

Primer caso.—La seccion S es constante

Sea entónces T_1 el valor de T; se tiene segun (9)

$$T_1 = \frac{2S\sqrt{H}}{m\,\Omega\sqrt{2g}}$$

O bien, si W es el volúmen total del líquido,

$$(10) \qquad T_1 = \frac{2W}{m\,\Omega\sqrt{2gH}}$$

Segundo caso.— La seccion S varia de tal manera que el nivel del agua en el depósito baja proporcionalmente al tiempo.

Para que el nivel baje proporcionalmente al tiempo es necesario que

$$\frac{dz}{dt} = C^{te}$$

Luego segun (8), se debe tener, si K es una constante,

$$\frac{S}{\sqrt{z}} = K$$

Sea T_2 el tiempo buscado, la ecuacion (9) dá

$$T_2 = \frac{KH}{m\,\Omega\,\sqrt{2g}}$$

El volúmen total del líquido es entónces

$$W = K\int_0^H \sqrt{z}\,dz = \frac{2}{3}\,KH\sqrt{H}$$

Luego

$$T_2 = \frac{\frac{3}{2}\,W}{m\,\Omega\,\sqrt{2gH}} = \frac{3}{4}\,T_1$$

TIEMPO NECESARIO PARA LLENAR UN DEPÓSITO EN COMUNICACION CON OTRO DEPÓSITO DE NIVEL CONSTANTE

Este problema tiene su aplicacion en los canales de navegacion cuyos tramos estan separados por eclusas i tambien en los diques secos en comunicacion con dársenas de nivel constante.

Para mas sencillez, supondremos que el orificio es rectangular i que su altura es pequeña respecto de su distancia al nivel del agua en el depósito de nivel constante.

Sean (fig. 72) A el depósito de nivel constante, B el depósito que se trata de llenar, T el tiempo buscado. Dividiremos el tiempo T en tres partes T_1, T_2, T_3: T_1 será el tiempo necesario para que el nivel del agua en B llegue hasta el borde inferior N del orificio; T_2, el tiempo necesario para que este nivel pase de N en M; finalmente T_3 el tiempo necesario para que el nivel del agua pase de M al nivel del agua en el depósito A.

1.° Durante el tiempo T_1 el gasto Q queda constante; sea Ω el área del orificio i H_c la distancia de su centro de gravedad al nivel superior del líquido en A, se tiene

$$Q = m\,\Omega\,\sqrt{2gH_c}$$

$$H_c = H + \frac{a}{2}$$

Sea, en el momento t, z la altura encima del fondo del agua en el depósito B, S el área de la seccion mojada, se tiene

$$S\,dz = m\,\Omega\,\sqrt{2gH_c}\,dt$$

Luego, si P es la altura del borde inferior del orificio sobre el fondo del depósito B,

$$T_1 = \frac{1}{m\,\Omega\,\sqrt{2gH_c}} \int_0^p S\,dz$$

2.° Durante el tiempo T_2 el gasto es dado por la fórmula (4) en la cual x varia desde cero hasta a. Se tendrá todavia, a un momento cualquiera t,

$$S\,dx = Q\,dt$$

Luego

$$T_2 = \int_0^a \frac{S\,dx}{Q}$$

O bien, si se reemplaza Q por su valor (4)

$$T_2 = \frac{1}{m\Omega\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{S\,dx}{\frac{a-x}{a}\sqrt{H + \frac{a-x}{2}} + \frac{x}{a}\sqrt{H+a-x}}$$

Si a es pequeño respecto de H, se podrá escribir

$$\sqrt{H+\frac{a-x}{2}}=\sqrt{H_c-\frac{x}{2}}=\sqrt{H_c}\left(1-\frac{x}{2H_c}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{H_c}\left(1-\frac{x}{4H_c}\right)$$

$$\sqrt{H+a-x}=\sqrt{H_c+\frac{a-2x}{2}}=\sqrt{H_c}\left(1+\frac{a-2x}{2H_c}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{H_c}\left(1+\frac{a-2x}{4H_c}\right)$$

Luego

$$T_2=\frac{1}{m\,\Omega\sqrt{2gH_c}}\int_0^a\frac{S\,dx}{1-\frac{x^2}{4aH_c}}$$

O bien, al mismo órden de aproximacion,

$$T_2=\frac{1}{m\,\Omega\sqrt{2gH_c}}\int_0^a S\left(1+\frac{x^2}{4aH_c}\right)dx$$

3.° Durante el tiempo T_3 el orificio es completamente sumerjido; sea, a un instante t, y el nivel del agua encima del borde superior del orificio, el gasto Q será, en este instante,

$$Q=m\,\Omega\sqrt{2g(H-y)}$$

i se tendrá todavia

$$S\,dy=Q\,dt$$

Luego

$$T_3=\int_0^H\frac{S\,dy}{Q}=\frac{1}{m\,\Omega\sqrt{2g}}\int_0^H\frac{S\,dy}{\sqrt{H-y}}$$

De ahí se deduce, para el tiempo buscado T,

$$(10)\quad T=\frac{1}{m\,\Omega\sqrt{2gH_c}}\left\{\int_0^P S\,dz+\int_0^a S\left(1+\frac{x^2}{4aH_c}\right)dx\right.$$
$$\left.+\sqrt{H_c}\int_0^H \frac{S\,dy}{\sqrt{H-y}}\right\}$$

En la práctica, las integrales se resolverán por aproximaciones.

Cuando la seccion S del depósito B queda constante, la fórmula (10) se reduce a la siguiente

$$T=\frac{S}{m\,\Omega\sqrt{2gH_c}}\left\{P+a+\frac{a^2}{12H_c}+2\sqrt{HH_c}\right\}$$

Se tiene ahora

$$\sqrt{HH_c}=\sqrt{H\left(H+\frac{a}{2}\right)}=H\left(1+\frac{a}{2H}\right)^{\frac{1}{2}}=H\left(1+\frac{a}{4H}-\frac{1}{32}\frac{a^2}{H^2}+\ldots\right)$$

Se puede, por otra parte, reemplazar $\frac{a^2}{12H_c}$ por $\frac{a^2}{12H}$ entónces

$$(11)\qquad T=\frac{S}{m\,\Omega\sqrt{2gH_c}}\left(P+\frac{3a}{2}+2H+\frac{a^2}{48H}\right)$$

Tiempo necesario para que el agua de dos depósitos, puestos en comunicacion por un orificio completamente sumerjido, se ponga a un mismo nivel

Sea H la diferencia de nivel inicial i z la diferencia de nivel a un momento t; se tiene, en este momento,

$$Q=m\Omega\sqrt{2gz}$$

Sean A i B las áreas de las secciones mojadas en los dos depósitos z_a, z_b sus distancias a un mismo plano horizontal orijen; si z_a es mayor que z_b se tiene, durante el tiempo dt,

$$-Adz_a = Bdz_b = Qdt$$

Por otra parte

$$z = z_a - z_b$$

Luego

$$dz = dz_a - dz_b = -Q\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)dt$$

Finalmente, el tiempo buscado T será dado por la integral

$$T = -\int_H^0 \frac{dz}{Q\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)} = \int_0^H \frac{dz}{m\,\Omega\sqrt{2gz}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)}$$

Si las áreas A i B varian con z, se debe en primer lugar espresar la suma $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$ en funcion de z; para ésto se debe notar que A es entónces una funcion conocida $f(z_a)$ de z_a i B otra funcion conocida $\phi(z_b)$ de z_b; se espresa entónces z_a i z_b en funcion de z por medio de las dos ecuaciones

$$\phi(z_a)\,dz_a + \phi(z_b)\,dz_b = O$$

$$z = z_a - z_b$$

en seguida se reemplazan z_a i z_b por sus valores en la suma

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{1}{f(z_a)} + \frac{1}{\phi(z_b)}$$

Se puede entónces calcular el valor de T.

Cuando A i B son constantes se tiene simplemente

$$T = \frac{2\sqrt{H}}{m\,\Omega\sqrt{2g}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)}$$

Sea W el volúmen que pasa de uno de los depósitos en el otro, se tiene

$$W\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=H$$

Luego

$$T=\frac{2W}{m\,\Omega\sqrt{2gH}}$$

Tiempo necesario para que el nivel de un líquido baje hasta el umbral de un vertedero

Supondremos constante el área de las secciones horizontales del depósito; sea entónces, a un momento t, H la altura, encima del umbral, del agua del depósito, se tiene

$$S\,dH=-Q\,dt$$

$$Q=m\,l\,H\sqrt{2gH}$$

Luego si H_0 es el valor inicial de H i T el tiempo buscado

$$T=\int_0^{H_0}\frac{S\,dH}{m\,l\,H\sqrt{2gH}}=\frac{S}{m\,l\sqrt{2g}}\int_0^{H_0}H^{-\frac{3}{2}}\,dH$$

Como la integral indefinida es $-2H^{-\frac{1}{2}}$ se ve que, en el límite inferior, se obtiene un valor infinito, así

$$T=\infty$$

CAPÍTULO XIX

Consideraciones jenerales sobre el movimiento del agua en las cañerías i en los canales

El estudio del movimiento del agua en las cañerías i los canales constituye la parte mas importante de la hidráulica.

En una primera aproximacion, se consideran las dimensiones trasversales de la corriente líquida como infinitamente pequeñas respecto de su lonjitud, de suerte que, en un punto cualquiera del líquido, la velocidad i la presion representan la velocidad i la presion media de la seccion normal correspondiente. Cada elemento de volúmen del líquido es entónces limitado por las paredes de la cañería o del canal i por dos secciones normales infinitamente próximas.

La observacion demuestra que, en un canal, hai siempre rejiones donde la seccion normal de la corriente líquida queda constante; en estas rejiones la velocidad del líquido es evidentemente constante, luego la accion de la pesantez es equilibrada por la accion de las paredes del canal. Lo mismo sucede en una cañería de seccion constante.

Tratemos, en primer lugar, de espresar la pérdida de carga que resulta de la accion de las paredes.

En el capítulo XVI hemos escrito la ecuacion

$$(1) \qquad d\left\{(p+c)\,dw+\frac{1}{2}\rho dw.\,v^2\right\}=-\rho g\,dw.\,dz$$

Debemos ahora agregar, en el segundo miembro, el trabajo elemental de las fuerzas que representan el efecto de las paredes.

Desde luego i para conformarnos al uso, reemplazaremos la letra v por la letra U cuyo valor es el cociente del gasto por el área de la seccion normal. U se llama jeneralmente velocidad media.

Sean: ds el arco descrito por el elemento de volúmen dw durante el tiempo dt i F la fuerza de la impulsion retardatriz debida a la accion de las paredes, el trabajo elemental de esta fuerza será $-Fds$. La fuerza F debe ser proporcional al área de la porción de pared en contacto con el líquido, ademas la esperiencia demuestra que esta fuerza es funcion de la velocidad U e independiente de la presion; sean, por consiguiente, ω el área de la seccion mojada, χ el perímetro mojado; el área de la porcion de pared en contacto con el elemento dw es $\chi \frac{dw}{\omega}$, luego se puede escribir

$$F = \rho g \frac{\chi}{\omega} dw \, \psi(U)$$

La ecuacion (1) toma entónces la forma

$$d \left\{ (p+c) \, dw + \frac{1}{2} \rho dw. \, U^2 \right\} = -\rho g \, dw. \, dz - \rho g \frac{\chi}{\omega} dw \, \psi(U) \, ds$$

O bien, si se dividen los dos miembros por el factor constante $\rho g \; dw$

$$d \left(\frac{p+c}{\pi} + \frac{U^2}{2g} \right) = -dz - \frac{\chi}{\omega} \psi(U) \, ds$$

O todavía, si se observa que c es una constante,

$$d \left(z + \frac{p}{\pi} + \frac{U^2}{2g} \right) = -\frac{\chi}{\omega} \psi(U) \, ds$$

En el primer miembro, la espresion entre paréntesis es la *carga* del líquido en el punto considerado; sea por consiguiente dP la pérdida de carga entre las dos secciones normales distantes de ds, se tiene.

$$(2) \qquad dP = -d \left(z + \frac{p}{\pi} + \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{\chi}{\omega} \psi(U) \, ds$$

I tambien

$$\frac{dP}{ds} = \frac{\chi}{\omega} \psi (U) \tag{3}$$

Cañerías de seccion constante

En una cañería de seccion constante, χ i ω son constantes, luego la velocidad U es tambien constante; las ecuaciones (2) i (3) se reducen entónces a los siguientes

$$dP = -d\left(z + \frac{P}{\pi}\right)$$

$$\frac{dP}{ds} = C^{te}$$

La primera muestra que la línea de carga es paralela a la línea de los niveles piezométricos i la segunda demuestra que la pérdida de carga varía proporcionalmente a la lonjitud de la cañería. El valor constante de $\frac{dP}{ds}$ se llama, en la práctica, *carga por unidad de lonjitud de la cañería.*

La carga por unidad de lonjitud se representa jeneralmente con la letra J; sea entónces D el diámetro de la cañería, se tiene

$$\chi = \pi D$$

$$\omega = \frac{1}{4} \pi D^2$$

Luego la fórmula (3) da

$$\frac{1}{4} D J = \psi (U) \tag{4}$$

Tal es la relacion necesaria que debe existir entre el diámetro D de la cañería, la carga J por unidad de lonjitud i la velocidad media U del agua; se comprende que, una vez conocida la funcion $\psi(U)$ se podrán resolver todos los problemas en los cuales se trata de determinar una de las cantidades D, J, U, cuando se conocen las otras dos.

Todavía se puede agregar a la fórmula (4) la relacion que existe entre el gasto Q i la velocidad U; se tiene evidentemente

$$(5) \qquad Q = \frac{\pi D^2}{4} U$$

En resúmen, las ecuaciones (4) i (5) son dos relaciones entre las cuatro cantidades D, J, U, Q; luego conociendo dos cualesquiera de ellas se podrán determinar las otras dos. De ahí resultan *seis* problemas distintos; porque se pueden formar *seis* combinaciones distintas de cuatro cantidades, dos a dos.

Canales descubiertos

En un canal descubierto se puede considerar la presion P como constante en todas las secciones del canal, luego, cuando la seccion mojada es constante, las ecuaciones (2) i (3) se reducen a

$$dP = -dz$$

$$\frac{dP}{ds} = C^{te}$$

De estas ecuaciones se deduce

$$\frac{dz}{ds} = C^{te}$$

Luego, en una porcion de canal descubierto, donde la velocidad es constante, la inclinacion del canal sobre el horizonte es constante; recíprocamente, las únicas rejiones de un canal descubierto en donde la velocidad del agua puede quedar constante, son las de inclinacion constante.

Sea entónces I el seno de esta inclinacion, se tendrá

$$\frac{dP}{ds} = -\frac{dz}{ds} = I$$

Pongamos tambien

$$\frac{\omega}{\chi} = R$$

La cantidad R se llama *radio medio* del canal. La ecuacion (3) da entónces

$$RI = \psi(U) \tag{6}$$

Es, como mas arriba, una relacion entre las cantidades R, I, U; luego una vez conocida la funcion $\psi(U)$ se podrá determinar una cualquiera de ellas cuando se conocen las dos otras.

Determinacion de la funcion $\psi(U)$

La funcion $\psi(U)$ figura en la espresion de la fuerza F que representa la accion retardatriz de las paredes sobre un elemento de volúmen dw de líquido; se ha escrito, en efecto,

$$F = \rho g \frac{\chi}{\omega} dw\, \psi(U)$$

Segun esta fórmula, $\psi(U)$ tiene las dimensiones de una lonjitud.

La funcion $\psi(U)$ debe depender, fuera de la velocidad U, de la forma de la seccion mojada i del estado i de la naturaleza de las paredes. Se comprende, por consiguiente, que la determinacion rigorosa de esta funcion sea, en jeneral, imposible.

Sin embargo, en la práctica, una aproximacion es suficiente. Se trata, pues, de encontrar una espresion que se preste con facilidad al cálculo numérico (en particular al cálculo logarítmico) i que sea suficientemente aproximada en los casos usuales.

En la ignorancia en que estamos de la forma que debe tener esta funcion, lo mas natural es de adoptar un desarrollo en série, ordenado segun las potencias sucesivas de U i de determinar en seguida los coeficientes de este desarrollo por medio de esperiencias directas. *Prony* limitó este desarrollo a los dos primeros términos i adoptó la fórmula

$$\psi(U) = a\,U + b\,U^2$$

Prony pensaba que los coeficientes a i b eran comunes a todas las paredes, porque suponia que una capa delgada de líquido quedaba como pegada a la pared i constituia la verdadera envoltura de la corriente líquida. La discusion de un gran número de esperiencias le dió entónces los valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}000.044 \\ b = 0{,}000.309 \end{array}\right\} \text{canales descubiertos}$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}000.017 \\ b = 0{,}000.348 \end{array}\right\} \text{cañerías}$$

En los dos casos, como se vé, el coeficiente b de U^2 es predominante; luego, para los valores de U suficientemente grandes, el término $a\,U$ es insensible delante $b\,U^2$. Este es, precisamente, el caso de la práctica.

Hoi dia, la fórmula de Prony i las tablas del mismo autor han caido en desuso por deficientes i se adopta, en los dos casos de los canales descubiertos i de las cañerías, la fórmula más sencilla

$$\psi(U) = b_1\ U^2$$

El coeficiente b_1 varia entónces segun la naturaleza i el estado de las paredes i algunos autores modernos lo consideran tambien como funcion de la velocidad U.

Canales descubiertos

En los canales descubiertos, la fórmula (6) se trasforma en la siguiente

(a) $$RI = b_1\, U^2$$

R es el radio medio, I el seno de la inclinacion del canal i U la velocidad media de la corriente líquida.

Ahora la discusion de un gran número de esperiencias directas, en las cuales se conocia R, I, U i se podia determinar b_1, ha conducido *M. Bazin* a escribir

(a′) $$b_1 = a + \frac{\beta}{R}$$

a i β son dos constantes que dependen solo de la naturaleza de las paredes i no de su forma. En la práctica los valores de b_1 estan calculados bajo forma de tablas, cuyo argumento es el radio medio R; estas tablas distinguen las diversas clases de paredes empleadas en los canales.

Últimamente (1) el mismo M. Bazin ha modificado la fórmula (a′) i la reemplaza por la siguiente

(a″) $$\sqrt{b_1} = 0{,}0115\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)$$

En esta nueva fórmula el coeficiente 0,0115 queda el mismo para todos los canales, cualesquiera que sean su forma i la naturaleza de sus paredes; el coeficiente γ tiene los valores siguientes:

1.° Paredes mui unidas (cimiento, madera acepillada).. $\gamma = 0{,}06$

2.° Paredas unidas (tablas, ladrillos, piedra canteada).. $\gamma = 0{,}16$

(1) Anales des Ponts et Chausées (1897, 4.° trimestre).

3.° Paredes en albañilería............................ $\gamma = 0{,}46$
4.° Canales en tierra en las condiciones ordinarias. $\gamma = 1{,}30$
5.° Canales en tierra que presentan una resistencia escepcional.. $\gamma = 1{,}75$

De las dos fórmulas (a) i (a″) se deduce tambien

$$\frac{\sqrt{RI}}{U} = 0{,}0115\left(1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}\right)$$

O bien

$$U = \frac{87\sqrt{RI}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}}$$

Las nuevas tablas de M. Bazin dan los valores de $\frac{\sqrt{RI}}{U}$ i $\frac{U}{\sqrt{RI}}$ para las cinco categorías de paredes.

Cañerías

La fórmula (4) da

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{4} DJ = b_1\ U^2$$

D es el diámetro de la cañería, J la carga por unidad de lonjitud i U la velocidad media. Las esperiencias de *Darcy* lo condujeron a adoptar para b_1, el valor

$$\text{(c′)} \qquad b_1 = \alpha + \frac{\beta}{r}$$

r representa aquí el semi-diámetro de la cañería. Como se vé, la fórmula (c′) es análoga a la fórmula (a′) de los canales descubiertos.

Darcy ha calculado tablas, deducidas de la esperiencia; ellas suponen que la cañería es nueva; los valores de b_1 deducidos de estas tablas se *doblan* en el caso de las cañerías en uso.

Fórmula de Flamant.—Flamant adopta la misma fórmula (c) pero reemplaza la fórmula (c') por la siguiente

$$b_1 = \frac{a}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{DU}} \qquad (c'')$$

Al llevar este valor en (c) se obtiene

$$DJ = \frac{aU^2}{\sqrt[4]{DU}}$$

Esta fórmula tiene bastante aceptacion por prestarse con acilidad al cálculo logarítmico.

M. Flamant reemplaza todavía la velocidad U por su valor en funcion del gasto Q, se tiene evidentemente

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} U$$

Luego

$$DJ = \frac{a}{D^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{4Q}{\pi D^2} \right)^{\frac{7}{4}}$$

O bien

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{D^{\frac{5}{4}} J}{a} \right)^{\frac{4}{7}} = \left[\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{7}{4}} D^{\frac{19}{4}} J \right]^{\frac{4}{7}}$$

Las tablas de M. Flamant dan los valores de

$$\gamma = a \left(\frac{4}{\pi} \right)^{\frac{7}{4}} D^{-\frac{19}{4}}$$

para una série de diámetros comprendidos entre o m. 01 i 1 m. 40; el valor adoptado para la constante a es

$$a = 0{,}00092$$

Este valor supone que se trata de una cañería en uso.

Una vez conocido γ en funcion del diámetro, se tiene simplemente

$$Q = \left(\frac{I}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}$$

A. OBRECHT.