CURSO DE CÁLCULO INFINITESIMAL

(Continuacion)

$$\frac{\partial x}{\partial u} = c\,\alpha' \qquad \frac{\partial x}{\partial u'} = c'\alpha$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = c\beta' \qquad \frac{\partial y}{\partial u'} = c'\,\beta$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = c\,\gamma' \qquad \frac{\partial z}{\partial u'} = c'\,\gamma$$

Estas seis ecuaciones definen los seis cosenos i las cantidades c i c' en funcion de u i u'. Sin embargo, entre estas diferentes cantidades, existen ciertas relaciones necesarias e independientes de la forma de la superficie; porque las derivadas de $c\alpha'$, $c\beta'$, $c\gamma'$ respecto de u' deben ser respectivamente iguales a las derivadas de $c'\alpha$, $c'\beta$, $c'\gamma$ respecto de u. Se tiene, por consiguiente, para todas las superficies,

$$c\,\frac{\partial \alpha'}{\partial u'}+\alpha'\,\frac{\partial c}{\partial u'}=c'\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}+\alpha\,\frac{\partial c'}{\partial u}$$

$$c\,\frac{\partial \beta'}{\partial u'}+\beta'\,\frac{\partial c}{\partial u'}=c'\,\frac{\partial \beta}{\partial u}+\beta\,\frac{\partial c'}{\partial u}$$

$$c\,\frac{\partial \gamma'}{\partial u'}+\gamma'\,\frac{\partial c}{\partial u'}=c'\,\frac{\partial \gamma}{\partial u}+\gamma\,\frac{\partial c'}{\partial u}$$

Supongamos que las curvas u; u' sean ortogonales i sean λ, μ, ν los cosenos directores de la normal a la superficie S en el punto considerado; las tres ecuaciones anteriores son equivalentes a las siguientes

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} c\left[\alpha\,\frac{\partial \alpha'}{\partial u'}\right]&=\frac{\partial c'}{\partial u}\\ \frac{\partial c}{\partial u'}&=c'\left[\alpha'\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right]\\ c\left[\lambda\,\frac{\partial \alpha'}{\partial u'}\right]&=c'\left[\lambda\,\frac{\partial \alpha}{\partial u}\right]\end{aligned}\right.$$

Busquemos ahora la curvatura jeodésica de una curva cualquiera de la superficie, en uno de sus puntos M. Sea ϕ el ángulo de la tanjente MT a esta curva con la tanjente a la curva u; se tendrá

$$\xi=\alpha\cos\phi+\alpha'\operatorname{sen}\phi$$

$$\xi'=-\alpha\operatorname{sen}\phi+\alpha'\cos\phi$$

De aquí se deduce

$$\frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{d\xi}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \cos\phi + \frac{d\alpha'}{ds} \operatorname{sen}\phi + \xi' \frac{d\phi}{ds}$$

Luego, si ρ es el radio de curvatura jeodésica de la curva en el punto M, se tendrá, segun (1),

$$\frac{1}{\rho} = \left[\xi' \frac{d^2 x}{ds^2}\right] = \left[\xi' \frac{d\alpha}{ds}\right] \cos\phi + \left[\xi' \frac{d\alpha'}{ds}\right] \operatorname{sen}\phi + \frac{d\phi}{ds}$$

Ahora

$$\left[\xi' \frac{d\alpha}{ds}\right] = -\left[\alpha \frac{d\alpha}{ds}\right] \operatorname{sen}\phi + \left[\alpha' \frac{d\alpha}{ds}\right] \cos\phi = \left[\alpha' \frac{d\alpha}{ds}\right] \cos\phi$$

$$\left[\xi' \frac{d\alpha'}{ds}\right] = -\left[\alpha \frac{d\alpha'}{ds}\right] \operatorname{sen}\phi + \left[\alpha' \frac{d\alpha'}{ds}\right] \cos\phi = \left[\alpha' \frac{d\alpha}{ds}\right] \operatorname{sen}\phi$$

Luego

$$\frac{1}{\rho} = \left[\alpha' \frac{d\alpha}{ds}\right] + \frac{d\phi}{ds}$$

O bien

$$\frac{1}{\rho} = \left[\alpha' \frac{d\alpha}{du}\right] \frac{du}{ds} + \left[\alpha' \frac{d\alpha}{du'}\right] \frac{du'}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

funcion de u i u'; pero si las curvas u son líneas jeodésicas la primera de las fórmulas (4) da

$$\frac{\partial c'}{\partial u} = 0$$

Luego c' no depende de u i σ conserva rigorosamente el mismo valor para todas las curvas u comprendidas entre u'_1, u'_2.

Ecuacion diferencial de las líneas jeodésicas en coordenadas curvilíneas

En todos los puntos de una línea jeodésica, $\frac{1}{\rho}$ es igual a cero, luego se tiene, segun (3),

$$\frac{1}{c'}\frac{\partial c}{\partial u'}\frac{du}{ds} - \frac{1}{c}\frac{\partial c'}{\partial u}\frac{du'}{ds} + \frac{d\phi}{ds} = 0$$

O bien

$$\frac{1}{c'}\frac{\partial c}{\partial u'}du - \frac{1}{c}\frac{\partial c'}{\partial u}du' + d\phi = 0$$

Se tiene ademas

$$\text{tg. } \phi = \frac{c'du'}{cdu}$$

Supongamos que c i c' dependen solo de u', se tendrá

$$\frac{\partial c'}{\partial u}=0 \qquad \frac{\partial c}{\partial u'}\,du'=dc$$

Las curvas u son entónces líneas jeodésicas i la ecuacion diferencial de las demas líneas jeodésicas de la superficie se reduce a

$$\frac{dc}{c}+\text{tg.}\,\phi\,d\phi=0$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$c\,\text{sen}\,\phi=C^{te}$$

Este es el caso de las superficies de revolucion; en efecto tomemos los meridianos como curvas u i los paralelos como curvas u', se tendrá

$$x=u'\cos u$$

$$y=u'\,\text{sen}\,u$$

$$z=f(u')$$

Luego

i

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-u'\,\text{sen}\,u \qquad \frac{\partial x}{\partial u'}=\cos u$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=+u'\cos u \qquad \frac{\partial y}{\partial u'}=\text{sen}\,u$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial u'}=f'(u)$$

De aquí se deduce

$$c^2 = u'^2$$

$$c'^2 = 1 + f'^2(u')$$

Se ve que c i c' dependen solo de u'; luego los meridianos son líneas jeodésicas de la superficie i las demas líneas jeodésicas averiguan la relacion

$$u' \operatorname{sen} \phi = C^{te}$$

Esta relacion se ha obtenido mas arriba.

Variacion de los nueve cosenos directores.
Fórmula de Liouville.

Consideremos las fórmulas (2); las dos primeras dan

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left[\alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial u'}\right] &= -\left[\alpha' \frac{\partial \alpha}{\partial u'}\right] = \frac{1}{c} \frac{\partial c'}{\partial u} = -\frac{c'}{\rho_u} \\ \left[\alpha' \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right] &= -\left[\alpha \frac{\partial \alpha'}{\partial u}\right] = \frac{1}{c'} \frac{\partial c}{\partial u'} = +\frac{c}{\rho_{u'}} \end{aligned} \right.$$

Representemos por $cc'H$ el valor de los dos miembros de la tercera fórmula (2), tendremos tambien

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left[\lambda \frac{\partial \alpha'}{\partial u'}\right] &= -\left[\alpha' \frac{\partial \lambda}{\partial u'}\right] = c'H \\ \left[\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right] &= -\left[\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right] = cH \end{aligned} \right.$$

Sean finalmente R, R' los radios de curvatura de las secciones de la superficie por los planos normales tanjentes a las curvas u, u' i $d\sigma$, $d\sigma'$ dos cambios de lugar dirijidos segun estas curvas, tendremos

$$\left[\alpha \frac{d\lambda}{d\sigma}\right] = -\frac{1}{R}$$

$$\left[\alpha' \frac{d\lambda}{d\sigma'}\right] = -\frac{1}{R'}$$

I, por consiguiente,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left[\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial u'}\right] &= -\left[\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u'}\right] = -\frac{c'}{R} \\ \left[\alpha' \frac{\partial \lambda}{\partial u}\right] &= -\left[\lambda \frac{\partial \alpha'}{\partial u}\right] = -\frac{c}{R'} \end{aligned} \right.$$

Las fórmulas (5), (6), (7), permiten calcular las derivadas parciales de los nuevos cosenos respecto de u i u'. Busquemos, por ejemplo, las derivadas de α, β, γ, respecto de u tendremos las fórmulas

$$\left[\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right] = 0$$

$$\left[\alpha' \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right] = +\frac{c}{\rho_{u'}}$$

$$\left[\lambda \frac{\partial \alpha}{\partial u}\right] = cH$$

Luego

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = c\left(\frac{\alpha'}{\rho_{u'}} + \lambda H\right)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} = c\left(\frac{\beta'}{\rho_{u'}} + \mu H\right)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial n} = c\left(\frac{\gamma'}{\rho_{u'}} + \nu H\right)$$

De la misma manera se obtienen las siguientes fórmulas

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial u} &= c\left(\frac{\alpha'}{\rho_{u'}} + \lambda H\right) & \frac{\partial \alpha}{\partial u'} &= c'\left(\frac{\alpha'}{\rho} + \frac{\lambda}{R}\right) \\
\frac{\partial \alpha'}{\partial u} &= c\left(\frac{\alpha}{\rho_{u'}} + \frac{\lambda}{R'}\right) & \frac{\partial \alpha'}{\partial u'} &= c'\left(-\frac{\alpha}{\rho_u} + \lambda H\right) \\
\frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -c\left(\alpha H + \frac{\alpha'}{R'}\right) & \frac{\partial \lambda}{\partial u'} &= -c'\left(\frac{\alpha}{R} + \alpha' H\right)
\end{aligned}\right.$$

Las demas fórmulas se deducen por una simple permutacion. Se puede escribir tambien

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{d\sigma'} &= \frac{\alpha'}{\rho_{u'}} + \lambda H & \frac{d\alpha}{d\sigma} &= \frac{\alpha'}{\rho_u} + \frac{\lambda}{R} \\
\frac{d\alpha'}{d\sigma} &= -\frac{\alpha}{\rho_{u'}} + \frac{\lambda}{R'} & \frac{d\alpha'}{d\sigma} &= -\frac{\alpha}{\rho_u} + \lambda H \\
\frac{d\lambda}{d\sigma'} &= -\alpha H - \frac{\alpha'}{R'} & \frac{d\lambda}{d\sigma} &= -\frac{\alpha}{R} - \alpha' H
\end{aligned}\right.$$

La cantidad H que figura en estas fórmulas es igual a cero cuando las curvas u i u' son líneas de curvatura; en el caso jeneral, si R_1 R_2 son los radios de curvatura principales, se tiene

$$(10) \qquad \frac{1}{RR'} - H^2 = \frac{1}{R_1 R_2}$$

De las ecuaciones (8) se pueden deducir algunas relaciones entre las curvaturas jeodésicas de las curvas u, u' i la curvatura de la superficie; escribamos, por ejemplo, que la derivada de $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ respecto de u' es igual a la derivada de $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$ respecto de u; obtendremos la relacion

$$\frac{\partial c}{\partial u'} \left(\frac{\alpha'}{\rho_{u'}} + \lambda H \right)$$

$$+ c \left\{ \frac{1}{\rho_{u'}} \frac{\partial \alpha'}{\partial u'} + H \frac{\partial \lambda}{\partial u'} + \alpha' \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho_{u'}} \right)}{\partial u'} + \lambda \frac{\partial H}{\partial u} \right\} =$$

$$\frac{\partial c'}{\partial u} \left(\frac{\alpha'}{\rho_u} + \frac{\lambda}{R} \right)$$

$$+ c' \left\{ \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial \alpha'}{\partial u} + \frac{1}{R} \frac{\partial \lambda}{\partial u} + \alpha' \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho_u} \right)}{\partial u} + \lambda \frac{\partial \left(\frac{1}{R} \right)}{\partial u} \right\}$$

De esta ecuacion i de las dos análogas en β i γ se deduce, despues de multiplicar por α', β', γ',

$$\frac{\partial c}{\partial u'} \; \frac{1}{\rho_{u'}} + c \left\{ - c' H^2 + \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho_{u'}} \right)}{\partial u'} \right\} =$$

$$\frac{\partial c'}{\partial u} \; \frac{1}{\rho_u} + c' \left\{ - \frac{c}{RR'} + \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho_u} \right)}{\partial u} \right\}$$

O bien

$$\frac{cc'}{\rho_{u'}^2} - cc' H^2 + c \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho_{u'}} \right)}{\partial u'} = \frac{cc'}{\rho_u^2} - \frac{cc'}{RR'} + c' \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho_u} \right)}{\partial u}$$

O todavia, segun (10),

$$\frac{d \left(\frac{1}{\rho_{u'}} \right)}{d\sigma} - \frac{d \left(\frac{1}{\rho_u} \right)}{d\sigma'} + \frac{1}{\rho_{u'}^2} + \frac{1}{\rho_u^2} = - \frac{1}{R_1 R_2}$$

Esta es la fórmula de *Liouville.*

CUARTA PARTE

ECUACIONES DIFERENCIALES I CÁLCULO DE LAS VARIACIONES

CAPÍTULO PRIMERO

Consideraciones jenerales.—Ecuaciones de primer órden

Se llama ecuacion diferencial una relacion de la forma siguiente:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{1}$$

i se llama *órden* de la ecuacion diferencial el mayor índice de derivacion que figura en la ecuacion.

Se trata de obtener la funcion o las funciones de x, y que satisfacen a la ecuacion diferencial propuesta.

Sea, por ejemplo, la ecuacion diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \phi(x)$$

Se obtiene inmediatamente

$$y = \int \phi(x)\, dx + C^{te}$$

La solucion contiene, como se ve, una constante arbitraria C. Sea todavia la ecuacion del segundo órden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \phi(x)$$

se obtendria, de la misma manera

$$\frac{dy}{dx} = \int \phi(x)\, dx + C$$

i, en seguida,

$$y = \int dx \int \phi(x)\, dx + Cx + C'$$

La solucion contiene ahora dos constantes C i C' i, cualesquiera que sean los valores de estas constantes, el valor de y satisface a la ecuacion diferencial.

Las dos ecuaciones diferenciales consideradas tienen, por consiguiente, una infinidad de soluciones segun los valores que se adoptan para las constantes.

Inversamente, se puede deducir, de una misma funcion, una infinidad de ecuaciones diferenciales. Sea, por ejemplo, la funcion

$$y=x^2$$

Se tiene evidentemente

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

$$y+\frac{dy}{dx}=x^2+2x$$

$$y\frac{dy}{dx}=2x^3$$

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}$$

Estas ecuaciones diferenciales no son equivalentes, ellas tienen solo una solucion comun: $y=x^2$.

TEOREMA FUNDAMENTAL.

La solucion jeneral de una ecuacion diferencial de órden n debe contener n constantes arbitrarias.

Consideremos, en efecto, la ecuacion diferencial (1) i recordemos que, en un punto dado de una curva plana, es equivalente conocer las p primeras derivadas de y respecto a x o bien p puntos infinitamente próximos del primero. Sean entónces, en el plano, n puntos $A_1\ A_2 \ldots A_n$ cuyas abcisas consecutivas difieren de una misma cantidad infinitamente pequeña dx i cuyas distancias consecutivas son infinitamente pequeñas del mismo órden que dx; todas las curvas que pasen por estos n puntos tendrán, en el primero de ellos, los mismos valores de y, $\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. Ahora, para que la curva considerada represente una solucion de la ecuacion diferencial (1) es necesario que ella pase por otro punto siguiente A_{n+1} tal que el valor de $\frac{d^n y}{dx^n}$ deducido de los $n+1$ puntos $A_1\ A_2 \ldots A_{n+1}$ satisfaga a la ecuacion diferencial (1).

Consideremos ahora los n puntos $A_2, A_3 \ldots A_{n+1}$, la curva que pasa por estos n puntos tiene, en el primero de ellos, ciertos valores determinados de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ i, para que ella represente una solucion de la ecuacion (1), es necesario que pase por otro punto siguiente i determinado A_{n+2}.

Al repetir indefinidamente el mismo raciocinio, se obtendrá una curva cuya ecuacion satisface a la ecuacion diferencial (1). Esta curva, como se ve, pasa por los n primeros puntos enteramente arbitrarios $A_1, A_2 \ldots A_n$. Luego la solucion jeneral de la ecuacion diferencial debe ser equivalente a la ecuacion de una curva susceptible de pasar por n puntos arbitrarios. Esta solucion debe, por consiguiente, contener n constantes arbitrarias.

Recíprocamente, *a una ecuacion entre x, y i n constantes arbitrarias, corresponde una sola ecuacion diferencial de órden n.*

Sea, en efecto, la ecuacion

$$F(x, y, c_1\ c_2 \ldots c_n) = 0 \tag{2}$$

Derivamos n veces esta ecuacion, obtendremos $n+1$ ecuaciones entre $x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^n y}{dx^n}$ i las n constantes; se podrá por consiguiente eliminar estas n constantes i se obtendrá una ecuacion diferencial de órden n. Si se pudieran obtener dos ecuaciones diferenciales distintas, sin constantes arbitrarias, se podria eliminar entre ellas la derivada $\frac{d^n y}{dx^n}$ i quedaria una ecuacion diferencial de órden $n-1$ equivalente a (2); esto no puede ser, puesto que la solucion jeneral de una ecuacion diferencial de órden $n-1$ contiene solo $n-1$ constantes arbitrarias.

Esta recíproca permite averiguar, en algunos casos, si ciertas constantes arbitrarias son distintas unas de otras; consideremos, por ejemplo, la espresion

$$(3) \qquad y = A \text{ sen } (x+\alpha) + B \cos (x+\beta)$$

en la cual A, α, B, β son constantes arbitrarias; se deduce de ella

$$\frac{dy}{dx} = A \cos (x+\alpha) - B \text{ sen } (x+\beta)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A \text{ sen } (x+\alpha) - B \cos (x+\beta)$$

Luego

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Esta ecuacion diferencial satisface a (3) cualesquiera que sean los valores de las cuatro constantes, pero ella es solo de segundo órden, luego las cuatro constantes deben equivaler solo a dos constantes distintas. Efectivamente el valor de y puede escribirse tambien

$$y = (A \cos \alpha - B \text{ sen } \beta) \text{ sen } x + (A \text{ sen } \alpha + B \cos \beta) \cos x$$

O simplemente

$$y = M \text{ sen } x + N \cos x$$

Se ve que las cuatro constantes A, α, B, β son equivalentes a dos constantes distintas M i N.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ÓRDEN.—SU INTERPRETACION JEOMÉTRICA

Sea

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{4}$$

la ecuacion diferencial dada; la solucion jeneral tendrá la forma

$$F, (x, y, C) = 0 \tag{5}$$

C es una constante arbitraria.

La ecuacion (5) representa una familia de curvas planas i la ecuacion diferencial (4) espresa que, en cada punto del plano, el coeficiente angular de la tanjente a la curva integral que pasa por este punto tiene un valor determinado.

Ahora, las curvas representadas por la ecuacion (5) tienen una envolvente i, en cada punto de la envolvente, la tanjente se confunde con la tanjente a la curva integral que pasa por el punto considerado; luego la envolvente de las curvas (5) será una curva que satisfará tambien a la ecuacion diferencial (4). La ecuacion de esta envolvente no contiene ninguna constante arbitraria i se designa con el nombre de *solucion singular*.

Observaremos que la ecuacion diferencial (4) puede reemplazarse por el sistema

$$f(x\, y\, \alpha)=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\alpha$$

La primera ecuacion representa una familia de curvas i la segunda espresa que, en todos los puntos de una misma curva α, el coeficiente angular de la tanjente a las curvas integrales es igual a α.

Aplicacion a las ecuaciones de Clairant

Consideremos la ecuacion diferencial

$$(6) \qquad y=x\frac{\frac{dy}{dx}+\operatorname{tg}\theta}{1-\frac{dy}{dx}\operatorname{tg}\theta}+F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Reemplacemos esta ecuacion por el sistema

$$(7) \qquad y=x\,\frac{\alpha+\operatorname{tg}\theta}{1-\alpha\operatorname{tg}\theta}+F(\alpha)$$

$$\frac{dy}{dx}=\alpha$$

Se ve que las curvas α son rectas, y su coeficiente angular es

$$\beta = \frac{\alpha + \operatorname{tg} \theta}{1 - \alpha \operatorname{tg} \theta}$$

Sea ϕ el ángulo que hace la tanjente a una curva integral con la recta α, tendremos

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\beta - \alpha}{1 + \alpha \beta} = \operatorname{tg} \theta$$

Luego el ángulo ϕ es constante e igual a θ i la solucion jeneral de la ecuacion diferencial (6) representa una familia de curvas que cortan las rectas (7) bajo un ángulo constante θ.

Si $\theta = 0$, la ecuacion (6) se reduce a la siguiente, llamada *ecuacion de Clairant.*

$$y = x \frac{dy}{dx} + F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

i la ecuacion de las rectas (7) se reduce a

$$(8) \qquad y = \alpha x + F(\alpha)$$

Las curvas integrales deben cortar las rectas (8) bajo un ángulo nulo, luego estas curvas integrales se confunden con las rectas. En resúmen la solucion jeneral de la ecuacion de Clairant es la ecuacion (8) en la cual α es la constante arbitraria.

Recíprocamente es fácil de demostrar que (8) es la solucion jeneral de la ecuacion de Clairant. Se deduce en efecto de (8)

$$\frac{dy}{dx} = a$$

I la eliminacion de a entre esta última ecuacion i (8) da precisamente la ecuacion de Clairant.

Una vez obtenida la solucion jeneral (8), la solucion singular resultará de la eliminacion de a entre (8) i su derivada parcial respecto de a, es decir

$$x + F'(a) = 0$$

Se debe observar que se obtendrá una ecuacion de Clairant cada vez que se definirá una curva por medio de una propiedad comun a todas sus tanjentes; en efecto cada tanjente debe ser entónces una solucion.

Buscaremos, por ejemplo, la *curva tal que el producto de las distancias de dos puntos fijos a una tanjente cualquiera sea constante.*

Elejimos los ejes de coordenadas de tal manera que OX pase por los dos puntos fijos i que el orijen O esté a igual distancia de cada uno de ellos; sean entónces c i $-c$ las abcisas de los puntos fijos, b^2 el producto constante de las distancias de estos puntos a una tanjente; la ecuacion diferencial de la curva buscada será

$$\frac{y + (c - x)\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} \times \frac{y - (c + x)\dfrac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}} = b^2$$

O bien

$$\left(y - x \frac{dy}{dx} \right)^2 = b^2 + (c^2 + b^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

Pongamos

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Tendremos

$$y = x \frac{dy}{dx} \pm \sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$$

Es una ecuacion de Clairant. La solucion jeneral es, por consiguiente,

$$y = \alpha x \pm \sqrt{b^2 + a^2 \alpha^2}$$

i la solucion singular resultará de la eliminacion de α entre esta última ecuacion i su derivada respecto a α

$$x \pm \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2 \alpha^2}} = 0$$

Se obtiene, sin dificultad, como resultado de la eliminacion

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Luego la curva buscada es una elipse.

EXÁMEN DE LOS CASOS EN QUE LA INTEGRACION ES POSIBLE

El caso mas sencillo es el de las ecuaciones diferenciales. en los cuales las dos variables estan separadas. Sea, por ejemplo, la ecuacion

$$f(x)\,dx+\phi(y)\,dy=0$$

La integracion es evidente i se obtiene

$$\int f(x)\,dx+\int \phi(y)\,dy+C=0$$

Se debe observar que la solucion jeneral contiene integrales de funciones de una variable es decir *cuadraturas*. Sin embargo, i apesar de que no se pueda en algunos casos obtener esplícitamente el valor de estas cuadraturas, se considera la ecuacion diferencial como resuelta. En otros términos, en la resolucion de las ecuaciones diferenciales, el signo $\int$ es un verdadero signo aljebráico, análogo, por ejemplo, al signo L de los logaritmos.

Ecuaciones homojéneas

Una ecuacion diferencial homojénea puede escribirse bajo la forma

$$f\left(\frac{y}{x}\right)dx+\phi\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$$

Hagamos

$$\frac{y}{x}=z$$

Tendremos

$$dy = xdz + zdx$$

Luego

$$f(z)\,dx + \phi(z)\,(xdz + zdx) = 0$$

O bien

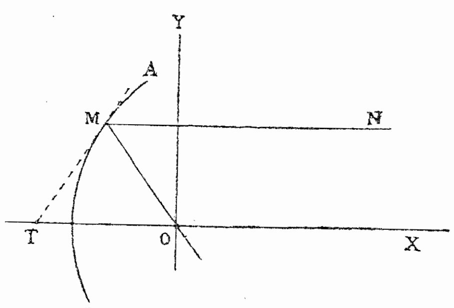
$$\left[f(z) + z\phi(z) \right] dx + x\,\phi(z)\,dz = 0$$

O todavia

$$\frac{dx}{x} + \frac{\phi(z)\,dz}{f(z) + z\phi(z)} = 0$$

Las dos variables x i z estan separadas, luego se puede hacer la integracion.

Fig. 1



Busquemos, como aplicacion, una *curva plana tal que los radios luminosos, paralelos a una direccion fija i reflejados por la curva, sean converjentes.*

Sean (fig. 1) AB la curva buscada, O el punto de converjencia de los radios reflejados i OX la direccion comun de los radios incidentes. Referimos los puntos de la curva al eje OX i a otro eje OY perpendicular sobre el primero.

Sea NM un radio de luz, M su interseccion con la curva AB i MT la tanjente a la curva en este punto; para que el radio reflejado pase por el punto O es necesario que el triángulo MOT sea isóceles; ahora se tiene

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$OT = x - y\frac{dx}{dy}$$

Luego la ecuacion diferencial de la curva buscada es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x - y\frac{dx}{dy}$$

O bien

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 1\right)dy + \frac{y}{x}\,dx = 0$$

Es una ecuacion homojénea del primer órden; haremos

$$\frac{y}{x} = z$$

i tendremos

$$(\sqrt{1+z^2} - 1)\ (x\,dz + z\,dx) + z\,dx = 0$$

O bien

$$\frac{\sqrt{1+z^2} - 1}{z\sqrt{1+z^2}}\,dz + \frac{dx}{x} = 0$$

Tendremos

$$dy = xdz + zdx$$

Luego

$$f(z)\,dx + \phi(z)\,(xdz + zdx) = 0$$

O bien

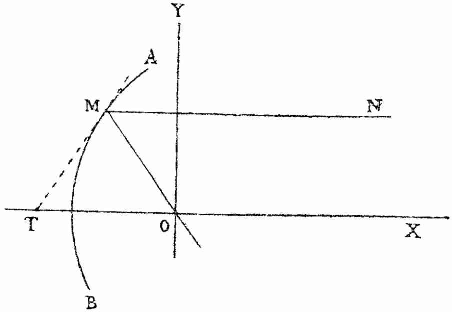
$$\left[\, f(z) + z\,\phi\,(z) \,\right]\, dx + x\,\phi\,(z)\,dz = 0$$

O todavia

$$\frac{dx}{x} + \frac{\phi\,(z)\,dz}{f\,(z) + z\,\phi\,(z)} = 0$$

Las dos variables x i z estan separadas, luego se puede hacer la integracion.

Fig. 1



Busquemos, como aplicacion, una *curva plana tal que los radios luminosos, paralelos a una direccion fija i reflejados por la curva, sean converjentes.*

Sean (fig. 1) AB la curva buscada, O el punto de converjencia de los radios reflejados i OX la direccion comun de los radios incidentes. Referimos los puntos de la curva al eje OX i a otro eje OY perpendicular sobre el primero.

Sea NM un radio de luz, M su interseccion con la curva AB i MT la tanjente a la curva en este punto; para que el radio reflejado pase por el punto O es necesario que el triángulo MOT sea isóceles; ahora se tiene

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$OT = x - y\frac{dx}{dy}$$

Luego la ecuacion diferencial de la curva buscada es

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x - y\frac{dx}{dy}$$

O bien

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} - 1\right) dy + \frac{y}{x}\, dx = 0$$

Es una ecuacion homojénea del primer órden; haremos

$$\frac{y}{x} = z$$

i tendremos

$$(\sqrt{1 + z^2} - 1)\ (x\, dz + z\, dx) + z\, dx = 0$$

O bien

$$\frac{\sqrt{1 + z^2} - 1}{z\sqrt{1 + z^2}}\, dz + \frac{dx}{x} = 0$$

Hagamos todavia

$$\sqrt{1+z^2}=u$$

Tendremos

$$\frac{du}{1+u}+\frac{dx}{x}=0$$

Luego

$$L(1+u)+Lx=LC$$

O bien

$$(1+u)x=C$$

Reemplacemos todavia u por su valor, tendremos

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=C$$

Es una familia de parábolas cuyo foco comun es el punto O i cuyo eje es OX.

Ecuaciones diferenciales lineales

La forma jeneral de estas ecuaciones es

(9) $$P\frac{dy}{dx}+Qy+R=0$$

P, Q, R son funciones cualesquiera de x. Hai varios métodos para integrar esta ecuacion; adoptaremos aquí el de la *variacion de las constantes arbitrarias.*

Consideremos, en primer lugar, la ecuacion

$$P\frac{dy}{dx}+Qy=0$$

La separacion de las variables es fácil i se obtiene

$$\frac{dy}{y}+\frac{Q\,dx}{P}=0$$

Luego

$$Ly+\int\frac{Q}{P}\,dx=LC$$

O bien

(10) $$y=Ce^{-\int\frac{Q}{P}dx}$$

Supongamos ahora que C, en vez de ser una constante, sea una funcion de x i busquemos cuál debe ser esta funcion para que el valor (10) de y satisfaga a la ecuacion propuesta (9). Deduciremos de (10)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}e^{-\int\frac{Q}{P}dx}-C\frac{Q}{P}e^{-\int\frac{Q}{P}dx}$$

Sustituimos este valor de $\frac{dy}{dx}$ i el valor (10) de y en la ecuacion (9), obtendremos

$$P\frac{dC}{dx}e^{-\int\frac{Q}{P}dx}+R=0$$

Luego

$$\frac{dC}{dx}=-\frac{R}{P}e^{\int\frac{Q}{P}dx}$$

$$C=-\int\frac{R}{P}e^{\int\frac{Q}{P}dx}dx+C$$

A. OBRECHT

(Continuará)