HISTORIA DE LAS MATEMÉTICAS

POR

CARLOS WARGNY

(Continuacion)

Aristarco de Samos (—310 a—250) era propiamente un astrónomo: pretendia que el sol es el centro del Universo i que la tierra jira al rededor del sol; concepcion que, aunque esplica fácilmente la revolucion de los astros, no fué admitida por sus conteporáneos; pero sus cálculos de las dimensiones del sol i la luna i de sus distancias a la tierra fueron aceptadas hasta por el mismo Arquímedes.

De las 19 proposiciones que emplea para llegar a éstos resultados, daremos a conocer la séptima: Encontró que la distancia angular del sol a la luna era $\frac{29}{30}$ de 90° (89°21' exactamente); demostró, en seguida, que la distancia D del sol a la tierra i la d de la luna a la misma eran:

$$18\,d < D < 20\,d,$$

para lo cual consideró el sol S, la tierra T i la luna L en una de sus cuadraturas.

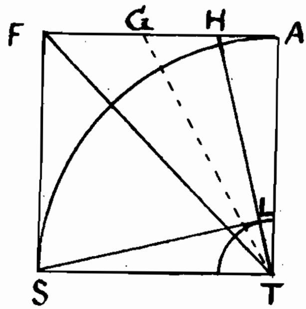

Fig. 2

Dibujemos los cuadrantes que pasan por S i L, construyamos el cuadrado $STAF$ i tracemos la bisectriz TF de 90° i la TG del ángulo FTH. Tendremos, siendo $\sphericalangle\, ATL = \frac{1}{30}$ de 90°:

$$\frac{\sphericalangle\, ATG}{\sphericalangle\, ATH} = \frac{1}{4} : \frac{1}{30} = \frac{15}{2}$$

i

$$\frac{AG}{AH} = \frac{\operatorname{tg} ATG}{\operatorname{tg} ATH} > \frac{15}{2}; \tag{1}$$

i como TG es bisectriz, TF diagonal i AF lado del cuadrado,

$$\frac{\overline{FG}^2}{\overline{AG}^2} = \frac{\overline{TF}^2}{\overline{TA}^2} = \frac{2}{1}.$$

En consecuencia,

$$\frac{FG}{AG} > \frac{7}{25}, \quad \frac{AF}{AG} > \frac{12}{5}, \quad \frac{AT}{AG} > \frac{12}{5}. \tag{2}$$

De las desigualdades (1) i (2) sacamos:

$$\frac{AT}{AH} > \frac{18}{1}.$$

i de los triángulos semejantes *TLS*, *TAH:*

$$\frac{TS}{TL} > \frac{18}{1}.$$

El tercer miembro de la desigualdad en *D* i *d* se obtiene de la misma manera.

Conon i *Dositeo* fueron los sucesores inmediatos de Euclides; *Zeuxipo* i *Nicoteles*, sus contemporáneos, es probable que enseñaran en Alejandría.

Arquímedes (-287 a -212) nació en Siracusa, estudió en Alejandría con Conon i pasó el resto de su vida en su ciudad natal. Apesar de estar relacionado con la familia reinante en Siracusa, jamas tomó parte en la política.

Fué un jénio incomparable en las artes mecánicas, fecundo inventor i eminente matemático.

Así como Platon, ponia la ciencia pura por encima de sus aplicaciones. Todo el mundo conoce el oríjen de la palabra *eureka*, lanzada por Arquímedes cuando descubrió el principio de Hidrostática que lleva su nombre; i el empleo que hizo de los espejos ustorios para incendiar la flota romana.

En otra ocasion, se quiso botar al mar un buque de grandes dimensiones: Arquímedes, con un aparato compuesto de poleas, accionadas por un tornillo sin fin, logró hacerlo fácilmente. Se cree que fué entónces cuando esclamó: «Dadme un punto de apoyo i levanto el mundo.»

El *tornillo de Arquímedes* es un tubo encorvado en espiral, cuyo estremo inferior se sumerje en el agua; haciendo jirar la espiral al rededor de su eje inclinado, el líquido sube i sale por el estremo superior. Este aparato ha sido empleado en Ejipto para estraer el agua proviniente de las inundaciones del Nilo; i sirvió, durante algun tiempo, para retirar el agua de la cala de los buques.

En 1747, Buffon consiguió incendiar una tabla de madera a 40 metros de distancia, empleando 168 espejos que hacian converjer los rayos solares sobre un mismo punto. De este modo quedó comprobado el hecho, puesto en duda, del incendio de la flota que sitiaba a Siracusa, al mando del jeneral romano Marcelo. Parece que en 514, despues de J. C., se emplearon los espejos ustorios en el sitio de Constantinopla.

Arquímedes construyó catapultas de tal poder, que los romanos tuvieron que trasformar el sitio de Siracusa en bloqueo, i por este motivo la toma de la ciudad se retardó tres años.

El gran matemático fué muerto en el pillaje a que se entregó el ejército vencedor, despues de la rendicion de Siracusa. Se cuenta que un soldado romano encontró a Arquímedes absorto en sus meditaciones, contemplando una figura jeométrica que habia trazado en la arena. Arquímedes le pidió que se retirara i furioso el soldado de recibir una órden, e ignorando quien era el anciano que le hablaba, lo atravesó con su espada.

Los romanos erijieron un monumento soberbio a la memoria de Arquímedes i, cumpliendo con sus deseos, grabaron sobre su tumba una esfera inscrita en un cilindro, en recuerdo de la proposicion descubierta por él mismo: los volúmenes de estos dos sólidos son entre sí como 2:3, lo mismo que sus superficies:

Para los volúmenes tenemos:

$$\frac{\text{Esfera}}{\text{Cilindro}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2 \, 2r} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

i para las superficies:

$$\frac{4\pi r^2}{2\pi r^2 + 2\pi r . 2r} = \frac{4\pi r^2}{6\pi r^2} = \frac{2}{3}$$

Siglo i medio despues, en —75, su tumba fué descubierta por Ciceron, el grande orador romano.

Es digno de observarse que miéntras que Euclides produjo testos metódicos de enseñanza destinados a la juventud, Arquímedes escribió sobre casi todos los ramos de las ciencias exactas conocidas en aquellos tiempos; i estas memorias notables estaban dirijidas principalmente a los matemáticos mas instruidos de su época. Sus obras de mecánica son las de *mayor importancia* para nosotros; pero no era ésta la opinion de su autor, pues estimaba superiores sus descubrimientos de la cuadratura de las superficies parabólica i esférica i la cubatura de la esfera.

Dividiremos sus obras en cinco clases.

I.—Jeometría plana.—Nos quedan tres de sus memorias.

1.° *La medida del círculo,* en tres proposiciones. En la primera hace ver que la superficie del círculo equivale a la de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio r i la circunferencia $2\pi r$, esto es,

$$\frac{1}{2} r (2 \pi r) .$$

En la segunda demuestra jeométricamente que $\frac{\pi a^2}{(2a)^2}$ difiere mui poco de $\frac{11}{14}$; i en la tercera, que π está comprendido entre $3\frac{10}{70}$ i $3\frac{10}{71}$, para lo cual inscribe en un círculo un polígono de 96 lados i circunscribe al mismo un polígono semejante al primero.

Calcula sus perímetros, i, admitiendo que el largo de la circunferencia está comprendida entre esas dos lonjitudes concluye que

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} < \pi < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}}.$$

Se presume que poseia un método particular para estraer raiz cuadrada i que nosotros desconocemos. Construyó una tabla de senos naturales que puede haber servido en los cálculos posteriores de Hiparco i Tolomeo.

2.º *La cuadratura de la parábola* con 24 proposiciones. En las cinco primeras establece algunas propiedades de las conoides; en las 6 a 7 da una prueba mecánica de la razon que guardan entre sí dos arcos parabólicos, i lo consigue, suspendiendo de los brazos de una balanza las superficies consideradas. Este procedimiento fué empleado, siglos mas tarde, por Galileo en la cuadratura de la cicloide. En las últimas proposiciones (18 a 24), prueba jeométricamente este resultado, basándose en el método de la exhaucion. Reproducimos esta demostracion, valiéndonos de la teoría de los límites.

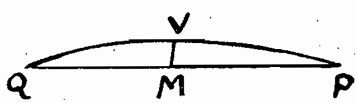

Fig. 3

Sea $P\ V\ Q$ un arco de parábola, $P\ Q$ la cuerda i $V\ M$ el diámetro; tendremos, segun una proposicion anterior, que V es el punto mas distante de la cuerda. Sea $\triangle$ el área del triángulo $P\ V\ Q$. En los segmentos parabólicos limitados por las cuerdas $P\ V$, $Q\ V$ inscribamos dos triángulos, como se hizo en el segmento $P\ V\ Q$.

Segun otra proposicion demostrada, encontramos que cada uno de los nuevos triángulos valen $\frac{1}{8}\triangle$ i su suma $\frac{1}{4}\triangle$; los nuevos triángulos inscritos en los dos anteriores dan para su área, $\frac{1}{16}\triangle$; procediendo así sucesivamente;

hallaremos, por último, que el área parabólica es el límite de la suma de

$$\triangle + \frac{1}{4}\triangle + \frac{1}{16}\triangle + \dots + \frac{1}{4^n}\triangle + \dots$$

Para encontrar la suma de esta progresion jeométrica, Arquímedes consideraba la serie

$$A,\ B,\ C,\ D \dots\dots\ J,\ K,$$

en la que cada término es igual a la cuarta parte del anterior.

Sea ahora

$$b = \frac{1}{3}B,\ C = \frac{1}{3}C,\ \dots\ k = \frac{1}{3}K,$$

i como

$$B = \frac{1}{4}A,\ C = \frac{1}{4}B,\ \dots\ k = \frac{1}{4}J,$$

tendremos:

$$b + B = \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}A = \frac{1}{12}A + \frac{3}{12}A$$

$$b + B = \frac{1}{3}A,$$

$$c + C = \frac{1}{3}B$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$k + K = \frac{1}{3}J,$$

cuya suma es:

$$(b + c + \dots + k) + (B + C + \dots + K)$$
$$= \frac{1}{3} (A + B + \dots + J);$$

pero, por hipótesis,

$$(b + c + \dots + k) = \frac{1}{3} (B + C + \dots + J) + \frac{1}{3} K$$

uego,

$$(B + C + \dots + K) + \frac{1}{3} K = \frac{1}{3} A$$

i $$A + B + C + \dots + K = \frac{4}{3} A - \frac{1}{3} K,$$

esto es, la suma buscada es igual a los cuatro tercios del primer término disminuido en el tercio del último. Aplicando este resultado al problema de la parábola, resulta que el segmento equivale a los $\frac{4}{3}$ del triángulo $P\,V\,Q$ i a los $\frac{2}{3}$ del rectángulo de base $P\,Q$ i cuya altura es la distancia de V a $P\,Q$.

3.º *Las espirales* contienen 28 proposiciones sobre la curva

$$r = c\,\theta,$$

cuyo radio vector r crece proporcionalmente con el ángulo vectorial θ. Da a conocer sus principales propiedades i determina el área A entre dos radios vectores valiéndose de la relacion, que espresamos en infinitesimales:

$$\frac{1}{2}(r + d\,r)^2\ d\,\theta > d\,A > \frac{1}{2} r^2\ d\,\theta$$

Para sumar las áreas parciales, sienta dos lemas que le permiten sumar las series,

$$a^2 + (2\,a)^2 + (3\,a)^2 + \ldots + (n\,a),^2 \text{ (prop. 10)}$$

$$a + 2\,a + 3\,a + \ldots + n\,a. \text{ (prop. 11)}$$

4.º *Los métodos jeométricos, las paralelas, los triángulos, las propiedades de los triángulos rectángulos, los datos, el heptágono inscrito, los círculos tanjentes* i otros mas, son pequeños opúsculos o memorias que se han perdido, i talvez del último queden algunos fragmentos.

II.—*Estereometría* o Jeometría de 3 dimensiones. Nos quedan dos de sus trabajos.

1.º *La esfera i el cilindro*, con 60 proposiciones, es la mejor de sus obras, a juicio del autor.

En sus pájinas introdujo de intento varias conclusiones inexactas «con el fin de desconcertar a los supuestos jeómetras que pretenden haberlo descubierto todo sin haber dado jamás una prueba de ello, o que proclaman nn descubrimiento que es imposible.»

Trata en seguida de la superficie i volúmen de la pirámide, del cono, de la esfera i de los cuerpos de revolucion de jeneratriz poligonal inscrita en un círculo. La proposicion 10 dice: De todos los segmentos esféricos de igual área, el hemisferio tiene mayor volúmen.

Demuestra (II, 2) indirectamente que la cúbica $X^3 - ax^2 + \frac{4}{9} a^2 b = 0$ no tiene raiz real si $a > 3\,b$, de este modo completó la resolucion del problema: dividir por medio de un plano, una esfera en dos segmentos que guardan la relacion m; n.

Aunque en la Aritmética de Diofantes se encuentra una ecuacion cúbica mui sencilla, debemos declarar que jamas se trató esta cuestion por los matemáticos, sino mil años despues.

2.º *Las conoides i esferoides* con 40 proposiciones relativas al volúmen de los cuerpos de revolucion enjendrados por una seccion cónica. En las proposiciones 5 i 6 determina el área de una elipse.

3.º *Los poliedros semi-regulares*, obra perdida para nosotros.

III. *Aritmética.* La memoria sobre la numeracion no existe. El *Arenario* sirvió para desvanecer una objecion hecha a la obra anterior, en la que indica un sistema de numeracion que permitia espresar cualquier número, por grande que fuera i cuya posibilidad pusieron en duda algunos filósofos de Siracusa.

Créese, dice Arquímedes, que no puede espresarse en número la cantidad de granos de arena que hai en las costas de Sicilia; sin embargo, formaré un número superior al de los granos de arena que llenaren el universo, es decir, una esfera cuyo radio sea la distancia de la tierra al sol.

Como la nomenclatura griega no permitia formar númerso superiores a cien millones, 10^8, consideró este número como una unidad de su sistema de numeracion o de segundo órden; de este modo podia contar hasta 10^{16}, nuevo número que pudo considerar como una unidad de tercer órden, i así indefinidamente.

Supongamos, ahora, dice, que una esfera de radio igual a $\frac{1}{80}$ de un dedo de mi mano contenga 10,000 granos de arena, i que el diámetro del universo sea de 10^{10} estadios; entónces el número de granos de arena que llenaria el universo seria menor que $10^{6/3}$.

Presúmese que este sistema de numeracion sirvió a Arquímedes i Apolonio. Las unidades de este sistema forman una progresion jeométrica de razon comun 10^8. En este trabajo se hace observar que $p^m . p^n = p^{m+n}$.

Propuso a los matemáticos de Alejandría, el siguiente problema:

El Sol tenia un rebaño de toros i vacas de colores blanco, gris, pardo i pio (blanquinegro). El número de toros pios era menor que el de toros blancos i la diferencia era los $\frac{5}{6}$ del número de toros grises; era igualmente menor que el número de toros grises i la diferencia era los $\frac{9}{20}$ del número de toros pardos; por último, era aun menor que el número de toros pardos i la diferencia era igual a los $\frac{13}{42}$ del número de toros blancos. El número de vacas blancas era igual a los $\frac{7}{12}$ del número de animales grises (toros i vacas); el número de vacas grises era los $\frac{9}{20}$ del número de animales pardos; el número de vacas pardas era los $\frac{11}{30}$ del número de animales pios; por último, el número de vacas pias era igual a los $\frac{13}{42}$ del número de animales blancos. Arquímedes pedia la composicion del rebaño.

Este problema, considerado tan difícil en aquellos tiempos, no presenta ninguna dificultad si empleamos el áljebra para su resolucion. En efecto, sean x, y, z, u el número de toros i x', y', z', u' el de vacas de diferentes colores, tendremos el sistema de ecuaciones:

$$x - u = \frac{5}{6} y, \qquad x' = \frac{7}{12}(y + y'),$$

$$y - u = \frac{9}{20} z, \qquad y' = \frac{9}{20}(z + z'),$$

$$z - u = \frac{13}{42} x, \qquad z' = \frac{11}{30}(u + u'),$$

$$u' = \frac{13}{42}(x + x').$$

Eliminando una a una las incógnitas, se llega a una ecuacion indeterminada, cuyos valores menores son:

	Toros	Vacas
Blancos....	x = 10 366 482	x' = 7 206 360
Grises.....	y = 7 460 514	y' = 4 893 246
Pardos. ...	z = 7 358 060	z' = 3 515 820
Pios	u = 4 149 387	u' = 5 439 213

Se ha puesto en duda la paternidad de este problema; i se dice que un copista agregó probablemente la condicion de que la suma $x+y$ fuera un cuadrado i $z+u$ un número triangular.

Como en el papiro de Ahmes, de que hablamos anteriormente, Arquímedes escribe $\frac{1}{7}+\frac{1}{6}$ en vez de $\frac{13}{42}$.

IV *Mecánica.* Poseemos aun dos obras.

1.º *La mecánica* es un tratado de Estática en que estudia, en 25 proposiciones, el equilibrio i el centro de gravedad de las láminas planas en forma de paralelógramos, triángulos, trapecios i segmentos parabólicos.

2.º *El tratado de las palancas*, que está perdido para nosotros, describia, probablemente, todas las máquinas de su tiempo. Segun Pappo, en él discutia la manera de desplazar un peso conocido con una potencia dada. Cabe suponer si Arquímedes describió en esta obra un sistema de poleas empleado en los trabajos públicos Siracusa.

3.º *Los cuerpos flotantes.* Consta de 19 proposiciones, i es la primera tentativa de la aplicacion de las Matemáticas a la Hidrostática.

Vitruvio cuenta que este trabajo tuvo el siguiente oríjen: Hieron, rei de Siracusa, habia confiado a un joyero cierta cantidad de oro para que le fabricara una corona. Concluido el trabajo, la corona tenia el peso del oro entregado; pero como se dudara de la honradez del artífice, se consultó a Arquímedes sobre si una parte del oro habia sido sustituido por un peso igual de plata. Preocupado el jeómetra de esta cuestion, se encontraba cierto dia en un baño público i observó que al introducirse en el agua, recibia su cuerpo un empuje que era tanto mayor cuanto mas él se sumerjia. Dominado por una súbita idea se lanzó desnudo fuera del baño i corrió a su casa esclamando: *¡Eureka! ¡eureka!*, lo encontré, lo encontré. Esta primera observacion fué seguida de los esperimentos que hizo, sumerjiendo en el agua pesos conocidos de oro i plata i anotando los pesos que perdian, segun lo indicaba una balanza. Dedujo de esto que el peso perdido era igual al peso del agua desalojada.

La tradicion agrega que constató el hecho de haber cometido el joyero un fraude.

Arquímedes comienza su obra demostrando que la superficie de un líquido es esférica, siendo el centro de la esfera el de la tierra. En seguida, prueba que la presion ejercida por un fluido sobre un cuerpo, sumerjido parcial o totalmente, es igual al peso del líquido desalojado. Deduce de aquí el equilibrio de un cuerpo flotante i aplica este resultado a segmentos esféricos i paraboloides de revolucion. En el libro XI, proposicion 4, establece que para que esté en equilibrio un paraboloide de revolucion, de altura h i de parámetro $2a$, que flota con su cúspide sumerjida i la base completamente fuera del líquido, estando el eje en posicion oblícua, la densidad δ debe verificar la desigualdad

$$\delta < \left(\frac{h-3a}{h} \right)$$

Si se piensa que Arquímedes no conocia ni la Trigonometría ni la Jeometría Analítica, la solucion del problema anterior revela todo el poder de su jenio.

La teoría de la palanca i las leyes de la Hidrostática, tales como las estableció Arquímedes, subsistieron hasta 1586, año en que Stevin publicó su Estática. Los conocimientos de Mecánica de Arquímedes se referian a esta parte sola de la ciencia del movimiento: los griegos no hicieron ningun progreso en la Dinámica, porque ignoraban que esta parte de la Mecánica tiene sus fundamentos en la observacion i la esperimentacion, lo que pusieron en práctica, por primera vez, i muchos siglos despues, Galileo i Newton.

V.—*Astronomía.*—De las diversas obras que escribió sobre esta materia, nada nos queda. El libro *Construccion de la esfera celeste* se ha perdido; i la esfera estelar i el planetario que él construyó, fué llevado por Marcelo a Roma, donde se conservaron como curiosidades durante dos o tres siglos.

La enumeracion anterior de sus obras manifiesta cuán prodijioso era en sus concepciones este hombre estraordinario. Resaltan mas sus dotes escepcionales, cuando se sabe que no poseia mas que los *Elementos* de Euclides i las *Secciones cónicas*; a cuyos conocimientos agregó las dos observaciones siguientes: que la recta es la menor distancia entre dos puntos; i que de dos curvas reintrantes i de estremos comunes, la envolvente es mayor que la envuelta. En Estereometría habia establecido dos principios idénticos.

Durante los tiempos antiguos i los de la Edad Media, Arquímedes fué considerado como el mas grande de los matemáticos; i el homenaje de mayor gloria rendido a su nombre, consiste en que los sabios mas eminentes de todos los tiempos, son los que han hecho resaltar el mérito de sus obras i de su jenio incomparable.

Apolonio (—260 a —200) de Perga, es el tercer gran matemático de la antigüedad.

Adquirió justa celebridad por haber compuesto un tratado de las secciones cónicas que abarca todos los conocimientos de su época, a los que dió, ademas, un desarrollo considerable. Esta obra fué aceptada como testo clásico i desterró de las aulas los de Menecmo, Aristeo i Euclides.

Casi nada sabemos de su vida. Pappo lo pinta «vanidoso, envidioso de la reputacion ajena, i dispuesto a no perder ocasion para despreciar a los demas». Lo curioso es que si nada sabemos de su vida ni de Erastótenes, su contemporáneo, se conserva aun el recuerdo de sus sobrenombres, *épsilon* i *beta.*

El doctor Grow esplica estos apodos por la numeracion que tenian las salas donde daban sus conferencias los dos ilustres sábios; i el lector no ignora que los griegos escribian los números 5 i 2 empleando las letras ϵ i β.

Apolonio pasó algunos años en Pérgamo, Pamfilia, donde se habia creado una Universidad, tomando por modelo la de Alejandría. Ahí conoció a Eudemo i Atalo, a quienes envió mas tarde cada uno de los libros de las secciones cónicas. Volvióse a Alejandría, en donde pasó el resto de su vida.

En su grande obra de las secciones cónicas, estudió sus propiedades de un modo tan completo, que no dejó a sus sucesores nada que agregar. Empero, sus demostraciones son largas i confusas, aunque su raciocinio es riguroso. Para poder esplicar la estension i disposicion de la obra, algunos escritores aceptan la opinion del doctor Zeuthen, de que Apolonio poseia la teoría de las coordenadas ortogonales i oblicuas i su transformacion.

De los ocho libros de que se compone el tratado, con 400 proposiciones, poseemos los cuatro primeros en griego i los tres siguientes en árabe; el último ha desaparecido.

Conocemos toda la obra por los comentarios que de ella hicieron Pappo i Eutocio.

Los tres primeros libros, inspirados en los trabajos de Euclides, Menecmo i Aristeo, forman con el cuarto la parte elemental de la obra. Comienza por definir el cono de base circular i sus secciones planas que dan oríjen a las tres clases de curvas que llamó *elipse*, *parábola*, *hipérbola*.

La teoría de las cónicas descansa, casi del todo, en la siguiente proposicion que demuestra: Sean A, A' los vértices de la cónica, P uno de sus puntos, $PM \perp AA'$;

la razon $$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{AM.\ A'M}}$$

es constante para la elipse i la hipérbola;

i la razon
$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{AM}}$$

es constante para la parábola.

Hace ver en seguida que, si A es el vértice, $\frac{1}{2}$ p. el parámetro, $A\ M = x$, $M\ P = y$ las coordenadas de P,
$y^2 > p\ x$ caracteriza a la hipérbola;
$y^2 = p\ x$ a la parábola;
$y^2 < p\ x$ a la elipse.

Apolonio no poseia la nocion de la directriz de las cónicas ni la del foco de la parábola, i esceptuados estos dos conocimientos, los tres primeros libros encierran casi toda la materia de los testos modernos de Jeometría Analítica. En el libro IV desarrolla la teoría de las líneas cortadas armónicamente i de la interseccion de los sistemas de cónicas. Comienza el libro V por los máximos i mínimos, que aplica a la determinacion de los centros de curvatura i al desarrollo de la curva; determina ademas el número de normales de un punto a una cónica.

En el libro VI se ocupa en el estudio de las cónicas semejantes; i los libros VII i VIII tratan de los diámetros conjugados.

En 1710 Halley ha reconstituido por conjeturas el último libro.

Las esplicaciones prolijas i penosas de la obra, hacen difícil su lectura. En cambio la disposicion es lójica, irreprochables sus raciocinios, i con justicia es considerado este tratado como la obra maestra de la jeometría griega. La reputacion de Apolonio descansa enteramente sobre este trabajo i a él se debe el título de gran jeómetra que se le ha discernido.

En un estudio especial resuelve la cuestion siguiente: Se dan en un mismo plano dos rectas Aa, Bb que pasan por los puntos fijos *A*, *B;* trazar por un tercer punto *O*, situado fuera de las rectas, una tercera recta que corte a las dos primeras en los puntos *a* i *b* de modo que la razon *Aa*, *Bb*, sea conocida.

Apolonio reducia esta cuestion a 77 casos diferentes i, con ayuda de las cónicas, daba para cada caso una solucion apropiada.

En la obra De sectione spatii, reconstituida por Halley en 1806, trata la misma cuestion pero bajo la condicion de que el producto *Aa*, *Bb* sea conocido.

En *De sectione determinata*, restablecida por Roberto Simson en 1749, estudia diferentes cuestiones, entre las cuales se da la siguiente: Encontrar sobre una recta conocida *A B* un punto *B* tal que la razon $\overline{PA}:^2 PB$ sea dada. En *De tactionibus*, restablecida por Vieta en 1600, construye un círculo tanjente a tres círculos dados. *De inclinationibus*, restablecida por Ghetaldi en 1607, tiene por objeto trazar una recta tal que el segmento determinado por dos rectas o dos circunferencias dadas, tenga tambien una lonjitud dada.

Compuso, ademas, un tratado *De Locis planis*, reconstituido por Fermat en 1637 i por Simson en 1746, que versa sobre los lugares jeométricos planos; i otro sobre los *sólidos regulares*. Su obra sobre los *Inconmensurables no clasificados* era un comentario del libro X de Euclides. Pappo menciona otro trabajo, *los métodos de cálculos numéricos*, en el cual se presume que proponia una numeracion compuesta de triadas (10^3), en lugar de los octadas (10^8) de Arquímedes. En este órden de ideas, nuestra numeracion actual está formada de hexadas (10^6 un millon, 10^{12} un billon, 10^{18} un trillon, etc).

Apolonio escribió, ademas, sobre *Las estaciones i retrogradaciones* de los planetas, trabajo que sirvió a Tolomeo para componer su *Almagesto*; i redactó un tratado sobre la teoría i empleo del tornillo en mecánica.

La lista de todos sus trabajos es mui estensa; i es probable que muchos de ellos no eran mas que opúsculos que trataban cuestiones especiales.

(Continuará).