TEORIA DE LA ELASTICIDAD

POR

ALBERTO OBRECHT

(*Continuacion*)

CAPITULO IV

ECUACIONES DE CONTINUIDAD

Deformacion de una capa esférica

Las presiones directrices, en los puntos de un cuerpo deformado, son funciones contínuas de las coordenadas de estos puntos i ellas deben satisfacer a la condicion que cada volúmen elemental quede en reposo.

Sea un volúmen elemental limitado por planos paralelos a los de coordenadas. Los fuerzas que obran sobre este elemento son los presiones sobre las caras i las fuerzas esteriores, análogas a la pesantez. La suma de las proyecciones de todas estas fuerzas, sobre un eje cualquiera debe ser igual a cero.

Sean γ la acceleracion de las fuerzas esteriores, en el centro del elemento, ρ la densidad de este i γ_x la proyeccion de γ sobre OX. La suma de los proyecciones, sobre el mismo eje, de las fuerzas esteriores es

$$\rho\, \gamma_x\, dx\, dy\, dz$$

Ahora las presiones, sobre las dos caras perpendiculares a OX, dan los proyecciones

$$p_{xx}\, dy\, dz - \left(p_{xx} + \frac{d\, p_{xx}}{dx}\, dx\right) dy\, dz$$

Del mismo modo, las presiones, sobre los otros dos grupos de caras, dan los siguientes proyecciones.

$$p_y\, dz\, dx - \left(p_y + \frac{d\, p_{y\,x}}{dy}\, dy\right) dz\, dx$$

$$p_{zx}\, dx\, dy - \left(p_{zx} + \frac{d\, p_{z\,x}}{dz}\, d\, z\right) dx\, dy$$

La suma de estas proyecciones es igual a cero. Al efectuar las reducciones evidentes se obtienen finalmente las ecuaciones.

$$
(a) \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d\,p_{xx}}{dx} + \frac{d\,p_{yx}}{dy} + \frac{d\,p_{zx}}{dz} = \rho\,\gamma_x \\
&\frac{d\,p_{xy}}{dx} + \frac{d\,p_{yy}}{dy} + \frac{d\,p_{zy}}{dz} = \rho\,\gamma_y \\
&\frac{d\,p_{xz}}{dx} + \frac{d\,p_{yz}}{dy} + \frac{d\,p_{zz}}{dz} = \rho\,\gamma_z
\end{aligned}
\right.
$$

Estas son tres condiciones necesarias entre las derivadas parciales de las presiones directrices.

En el caso de los cuerpos isótropos se pueden reemplazar las presiones directrices por sus valores (8). Se deducen así tres ecuaciones análogas a la siguiente.

$$(\lambda+\mu)\frac{d\,Q}{dx} + \mu\left(\frac{d^2\,u}{d\,x^2} + \frac{d^2\,u}{d\,y^2} + \frac{d^2\,u}{dz^2}\right) = \rho\,\gamma_x$$

CASO PARTICULAR

La última ecuacion se simplifica si las proyecciones u, v, w de los cambios de lugar son las derivadas parciales de una misma funcion de x, y, z. Sea, en efecto,

$$u = \frac{d\,\varphi}{d\,x}, \qquad v = \frac{d\,\varphi}{d\,y}, \qquad w = \frac{d\,\varphi}{d\,z}$$

Se deduce

$$Q = \frac{d^2\,\varphi}{d\,x^2} + \frac{d^2\,\varphi}{d\,y^2} + \frac{d^2\,\varphi}{d\,z^2}$$

$$\frac{d^2\,u}{d\,x^2} + \frac{d^2\,u}{d\,y^2} + \frac{d^2\,u}{d\,z^2} = \frac{d^3\,\varphi}{d\,x^3} + \frac{d^3\,\varphi}{dx\,dy^2} + \frac{d^3\,\varphi}{dx\,dz^2} = \frac{d\,Q}{d\,x}$$

Luego

$$(\lambda+2\mu)\frac{dQ}{dx}=\rho\,\gamma_x$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{dQ}{dy}=\rho\,\gamma_y$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{dQ}{dz}=\rho\,\gamma_z$$

Por consiguiente también

$$(\lambda+2\mu)\,dQ=\rho\,(\gamma_x\,dx+\gamma_y\,dy+\gamma_z\,dz)$$

En la jeneralidad de los casos, la fuerza $\rho\,\gamma$ es despreciable en comparacion de los presiones i la ecuacion obtenida se reduce a

$$Q=C^{te}$$

Por consiguiente las ecuaciones de condicion (a) equivalen a espresar que la dilatacion cúbica es constante.

APLICACION A LA DEFORMACION DE UNA CAPA ESFÉRICA SOMETIDA A PRESIONES CONSTANTES SOBRE LAS DOS CARAS

Por razon de simetria, el cambio de lugar de cada molécula esta dirijido hacia el centro de la capa i depende únicame de la distancia r de la molécula al centro. Por otra parte este centro queda evidentemente fijo durante la deformacion i es lójico adoptarlo como oríjen de coordenadas. Se tiene entónces

$$\frac{u}{x}=\frac{v}{y}=\frac{w}{z}=f(r)$$

Se deduce de estas relaciones

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz=r\,f(r)\,dr$$

Por consiguiente u, v, w son las derivadas parciales de una misma funcion de r.

Segun esto, la dilatacion cúbica debe quedar constante en toda la capa.

Se tiene ahora

$$\frac{du}{dx}=f+\frac{x^2}{r}f'$$

$$\frac{dv}{dy}=f+\frac{y^2}{r}f'$$

$$\frac{dw}{dz}=f+\frac{z^2}{r}f'$$

Luego

$$Q=3f+rf'$$

Esta ecuacion, en la cual Q es una constante, define la funcion f. La integracion da

$$f=\frac{Q}{3}+\frac{C}{r^3}$$

C es otra constante.

Conocida la forma de la funcion $f\,(r)$ se determinan los dos constantes Q, C de manera que las presiones sobre las dos caras tengan valores determinados. Para esto se calculan las presiones directrices, en un punto cualquiera de la capa.

Los cálculos se simplifican si se elije un punto cualquiera del eje OX; la abcisa de este punto es entónces igual a r, i las coordenadas y, z son nulas. Se obtiene así

$$\frac{du}{dx} = f + r\,f' \qquad \frac{dv}{dx} = 0 \qquad \frac{dw}{dx} = 0$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \qquad \frac{dv}{dy} = f \qquad \frac{dw}{dy} = 0$$

$$\frac{du}{dz} = 0 \qquad \frac{dv}{dz} = 0 \qquad \frac{dw}{dz} = f$$

Luego, segun los ecuaciones (8),

$$\begin{aligned} -p_{xx} &= \lambda\,Q + 2\,\mu\,(f + r\,f') & \qquad p_{yz} &= 0 \\ -p_{yy} &= \lambda\,Q + 2\,\mu\,f & p_{zx} &= 0 \\ -p_{zz} &= \lambda\,Q + 2\,\mu\,f & p_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

O bien, si se reemplazan f i f' por sus valores,

$$p_{xx} = -\frac{3\,\lambda + 2\,\mu}{3}\,Q + 4\,\mu\,\frac{C}{r^3}$$

$$p_{yy} = p_{zz} = -\frac{3\,\lambda + 2\,\mu}{3}\,Q - 2\,\mu\,\frac{C}{r^3}$$

Sean R, R' los radios de las dos esferas que limitan la capa; P, P' las presiones que obren sobre ellas. Para fijar las ideas se supondra que $R > R'$ i que la presion, sobre cada esfera, esta dirijido hacia el interior de la capa. En estas condiciones p_{xx} es igual a P sobre la esfera R i a P' sobre la esfera R'. Luego se tienen los ecuaciones

$$-\frac{3\lambda+2\mu}{3} Q + 4\mu \frac{C}{R^3} = P$$

$$-\frac{3\lambda+2\mu}{3} Q + 4\mu \frac{C}{R'^3} = P'$$

Se deduce de ellas

$$\frac{3\lambda+2\mu}{3} Q = \frac{P' R'^3 - P R^3}{R^3 - R'^3}$$

$$4\mu C = \frac{(P' - P) R^3 R'^3}{R^3 - R'^3}$$

Luego, en un punto cualquiera de la capa,

$$p_{xx} = \frac{P R^3 - P' R'^3}{R^3 - R'^3} + \frac{(P' - P) R^3 R'^3}{r^3 (R^3 - R'^3)}$$

$$p_{yy} = p_{zz} = \frac{P R^3 - P' R'^3}{R^3 - R'^3} - \frac{(P' - P) R^3 R'^3}{2 r^3 (R^3 - R'^3)}$$

Se averigua que, en los dos casos de $P=P'$ i de $R'=0$, las tres presiones son ignales a P.

Si la capa es mui delgada se puede escribir

$$R'=R\left(1-\frac{a}{R}\right)$$

$$r=R\left(1-\frac{\xi}{R}\right)$$

Si se desprecian entónces los cuadrados de $\frac{a}{R}$, $\frac{\xi}{R}$ se obtiene

$$p_{xx}=\frac{P\,(a-\xi)+P'\,\xi}{a}$$

$$p_{yy}=p_{zz}=\frac{P-P'}{2}\cdot\frac{R}{a}$$

Luego la presion, sobre un elemento perpendicular al radio, varia proporcionalmente a ξ i las presiones sobre los elementos trasversales tienen un valor constante, tanto mas grande cuanto menor es el espesor de la capa en comparacion de su radio.

CAPITULO V

TENSIONES SUPERFICIALES

La consideracion de la presion, en el interior de un cuerpo deformado, es una consecuencia de la hipótesis que la accion resultante, ejercitada sobre una molécula de un elemento plano por las que se encuentran a un mismo lado de él, varia de una manera contínua cuando se pasa de una molécula a otra cualquiera del mismo elemento.

Esto equivale a admitir que el cambio de la accion resultante, al pasar de una molécula a otra, es infinitamente pequeño en comparacion de la accion misma. Se deduce así que el sistema de las acciones, sobre las moléculas de un elemento plano, es equivalente a un solo vector.

Esta hipótesis deja de ser exacta si el elemento plano atraviesa la superficie esterior del cuerpo, porque el cambio de la accion resultante, sobre las moléculas del elemento, puede ser del orden mismo de esta accion, por lo tanto el sistema de estas acciones no es equivalente, en jeneral, a un vector único.

Sin embargo, si se considera un elemento lineal ds, sobre la superficie esterior, i un plano cualquiera P, que pasa por ds, se puede admitir que la accion resultante, ejercitada sobre las moléculas de ds por las que se encuentran a un mismo lado de P, varia de una manera contínua en los puntos de ds. Se deduce que el sistema de estas acciones es equivalente a un solo vector $T\ ds$.

Se dice que T, es la tension superficial en los puntos de ds.

Si T es finito, como la presion p en el interior del cuerpo, su valor es independiente de la inclinacion del plano P sobre el plano tanjente a la superficie.

Sea, en efecto, un elemento de volúmen limitado por un rectángulo, sobre la superficie esterior, un plano paralelo a este, en el interior del cuerpo i otros cuatro planos cualesquiera que pasan por los lados del rectángulo, se supone que el plano paralelo a la superficie se encuentra a una distancia de esta infinitamente pequeña de orden superior a los dimensiones lineales del rectángulo.

Las fuerzas que obran sobre las moléculas del elemento comprenden: 1.° las tensiones sobre los lados del rectángulo; estas son infinitamente pequeños de primer orden, respecto de los dimensiones lineales del rectángulo; 2.° las presiones que pueden obrar, desde el esterior, sobre el plano del rectángulo i, desde el interior del cuerpo, sobre el plano paralelo; unas i otras son equivalentes a un solo vector i su resultante es infinitamente pequeña de segundo orden; 3.º los fuerzas análogas a la pesantez; su resultante es de cuarto orden.

Como el elemento de volúmen esta en reposo, la suma de las proyecciones de todas las fuerzas, sobre un eje cualquiera, es igual a cero. En esta suma, los términos infinitamente pequeños de primer orden deben considerarse a parte, luego la suma de las proyecciones de las cuatro tensiones es igual a cero.

Si se cambiara la orientacion de uno de los cuatro planos que pasan por los lados del rectángulo, la tension, sobre el lado eorrespondiente, sería la única que cambiaria; pero la proyeccion de este cambio debe ser nula, ya que las otras tres proyecciones no varian. Como el eje de proyeccion tiene una direccion cualquiera, el cambio de la tension es nulo, luego la tension sobre un elemento lineal de la superficie es independiente de la orientacion del plano que pasa por el elemento.

La tension es tanjente a la superficie. Para demostrarlo se toman los momentos de las fuerzas respecto de tres ejes dirijidos segun los ejes de simetria OX, OY del rectángulo i la normal ON a la superficie. Sean T_x la tension sobre un lado perpendicular a OX; T_{xx}, T_{xy}, T_{xn}, las proyecciones de T_x sobre los tres ejes; T_{yx}, T_{yy}, T_{yn}, las proyecciones análogas de la tension T_y.

Los momentos de las tensiones son infinitamente pequeños de segundo órden i los momentos de las demas fuerzas son de orden superior; luego las sumas de los momentos de las tensiones son nulas.

Se obtienen así las ecuaciones

$$T_{xy}\, dy\, dx - T_{yx}\, dx\, dy = 0$$
$$T_{xn}\, dx\, dy = 0$$
$$T_{yn}\, dx\, dy = 0$$

La primera ecuacion demuestra que *el orden de los indices de T es indiferente* i las otras dos comprueban que la tension es tanjente a la superficie.

VARIACION DE LA TENSION SUPERFICIAL CON LA ORIENTACION DEL ELEMENTO

Se considera un elemento de volúmen, análogo al anterior, pero limitado, sobre la superficie, por un triángulo rectángulo XOY. Sean $XY=ds$ la hipotenusa, θ el ángulo que ella forma con OY i T_a la tension en los puntos de ds.

Se proyectan las fuerzas sobre OX i OY i se escribe que las sumas de los términos infinitamente pequeños de primer orden son nulas; se obtiene así

$$T_{ax}\,ds - T_{xx}\,ds\cos\theta - T_{yx}\,ds\operatorname{sen}\theta = 0$$
$$T_{ay}\,ds - T_{yy}\,ds\operatorname{sen}\theta - T_{xy}\,ds\cos\theta = 0$$

Luego

$$T_{ax} = T_{xx}\cos\theta + T_{xy}\operatorname{sen}\theta$$
$$T_{ay} = T_{yx}\cos\theta + T_{yy}\operatorname{sen}\theta$$

Se ve que las tensiones, al rededor de un punto, dependen de tres tensiones directrices.

Se deduce también, como en el caso de las presiones, que la tension queda constante al rededor de un punto cuando ella es siempre normal al elemento.

RELACIONES ENTRE LOS TENSIONES I LAS PRESIONES SUPERFICIALES

Se considera, sobre la superficie esterior del cuerpo deformado, un rectángulo infinitamente pequeño, limitado por cuatro líneas geodésicas respectivamente paralelas a las direcciones principales OX, OY de la superficie en el centro O

del rectángulo. En esta hipótesis, la tension $T_{xx}\,dy$ está contenida en el plano XON i la tension $T_{xy}\,dy$ es paralela a OY.

Sean R_x, R_y los radios de curvatura principales de la superficie en el punto O i p_n la presion resultante de la que puede obrar, desde el esterior, sobre el rectángulo i, desde el interior, sobre la cara opuesta. Se proyectan todas las fuerzas sobre los tres ejes i se escribe que las sumas de los términos de segundo órden son separadamente nulos.

Se obtienen así las ecuaciones

$$(b)\begin{cases} \dfrac{d\,T_{xx}}{dx}+\dfrac{d\,T_{xy}}{dy}+p_{nx}=0 \\[2ex] \dfrac{d\,T_{yy}}{dy}+\dfrac{d\,T_{xy}}{dx}+p_{ny}=0 \\[2ex] \dfrac{T_{xx}}{R_x}+\dfrac{T_{yy}}{R_y}-p_{nn}=0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones demuestran que un cuerpo deformado puede quedar en equilibrio, a pesar de que la presion superficial resultante p_n no es igual a cero. En este caso, las moléculas de la superficie esterior forman, al rededor del cuerpo, una verdadera capa elástica cuyas tensiones equilibran la presion p_n.

Es evidente que la consideracion de la capa elástica es inutil cuando la presion superficial es igual a cero.

CAPITULO VI

DEFORMACION DE UN CILINDRO, LIMITADO POR DOS SECCIONES RECTAS I SOMETIDO A LA ACCION DE FUERZAS QUE OBRAN SOBRE LAS BASES

Se supone que el conjunto de las fuerzas que obran sobre las dos bases forma un sistema equivalente a cero. En estas condiciones, el centro de gravedad O del cilindro permanece fijo durante la deformacion. Se elije este punto como oríjen de coordenadas i el eje OX paralelo a las jeneratrices; los otros dos ejes OY, OZ son perpendiculares entre si i a OX.

La experiencia demuestra que la distribucion de las fuerzas, sobre cada base, es indiferente. Si esta distribucion es igual sobre los dos bases el sistema de los que obran sobre cada una debe ser equivalente, en su centro de gravedad, a una resultante jeométria F; dirijida segun $O\ X$, i a un par. Sea M el eje del par que obra sobre la base de abcisa positiva; sus proyecciones, sobre los tres ejes, se designan por M_x, M_y, M_x.

Se considera una seccion recta cualquiera i las presiones que una de las partes del cilindro ejercita sobre la otra. Estas presiones deben equilibrar las fuerzas que obran sobre esta última. Si esta contiene la base de abcisa positiva se obtienen las ecuaciones.

$$
(c)\ \left\{\begin{array}{ll}
\int p_{xx}\, d\omega + F = 0 & \int (y\, p_{xz} - z\, p_{xy})\, d\omega + M_x = 0 \\
\int p_{xy}\, d\omega = 0 & \int z\, p_{xx}\, d\omega + M_y = 0 \\
\int p_{xz}\, d\omega = 0 & -\int y\, p_{xx}\, d\omega + M_z = 0
\end{array}\right.
$$

Las presiones directrices, en los puntos del cilindro, deben satisfacer a estas seis ecuaciones i, ademas, a las ecuaciones de continuidad (a).

En cada caso particular se elije naturalmente el sistema mas sencillo posible de las presiones directrices: se observa, en primer lugar, que las presiones p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} no figuran en los ecuaciones (c).

La hipótesis mas sencilla es de suponer estas tres presiones nulas en todos los puntos del cilindro.

Por otra parte, la coordenada x no figura esplícitamente en las ecuaciones (c) i se pueden elijir los valores de las tres presiones restantes p_{xx}, p_{xy}, p_{xy} de manera que ellas sean independientes de x.

En las ecuaciones de continuidad (a) se desprecia la fuerza $\rho \gamma$ en comparacion de las presiones; entónces las dos últimas ecuaciones estan satisfechas idénticamente i la primera se reduce a

$$\text{(d)} \qquad \frac{d\, p_{xy}}{dy} + \frac{d\, p_{xz}}{dz} = 0$$

CÁLCULO DE LAS DEFORMACIONES

Una vez elijido el sistema de los presiones directrices que satisface a las ecuaciones (c) i (d), las ecuaciones (8) permiten calcular las deformaciones. Las tres primeras dan, en el caso actual,

$$\lambda\, Q + 2\, \mu\, \frac{du}{dx} = -p_{xx}$$

$$\lambda\, Q + 2\, \mu\, \frac{dv}{dy} = 0$$

$$\lambda\, Q + 2\, \mu\, \frac{dw}{dz} = 0$$

Se deduce de ellas

$$(3\, \lambda + 2\, \mu)\, Q = -p_{xx}$$

Se pone ahora

$$\frac{\mu\, (3\, \lambda + 2\, \mu)}{\lambda + \mu} = E$$

$$\frac{\lambda}{2\,(\lambda+\mu)}=m$$

i se obtiene el sistema de ecuaciones

$$(e)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dx}=-\dfrac{1}{E}\,p_{xx} & \dfrac{dv}{dz}+\dfrac{dw}{dy}=0 \\[2ex] \dfrac{dv}{dy}=+\dfrac{m}{E}\,p_{xx} & \dfrac{dw}{dx}+\dfrac{du}{dz}=-\dfrac{1}{\mu}\,p_{xz} \\[2ex] \dfrac{dw}{dz}=+\dfrac{m}{E}\,p_{xx} & \dfrac{du}{dy}+\dfrac{dv}{dx}=-\dfrac{1}{\mu}\,p_{xy} \end{array}\right.$$

Basta determinar, en cada caso, una solucion particular de este sistema de ecuaciones diferenciales; se sabe, en efecto, que los seis constantes arbitrarios de la solucion jeneral corresponden a una traslacion i a una rotacion de todo el cilindro.

INTERPRETACION DE LA ECUACION (*d*) DE CONTINUIDAD

Sea un elemento plano, paralelo a OX, en el interior del cilindro, i p_n la presion sobre este elemento. Las tres proyecciones de p_n se deducen de las ecuaciones (3); se debe hacer, en estos, $\alpha=0$, $p_{yy}=p_{zz}=p_{yz}$ 0; se obtiene entónces:

$$\begin{aligned} p_{nx}&=\beta\; p_{xy}+\gamma\; p_{xz} \\ p_{ny}&=0 \\ p_{nz}&=0 \end{aligned}$$

Segun esto la presion p_n se reduce a la componente p_{nx} contenida en el plano del elemento i paralela a las jeneratrices del cilindro, Se proyecta el elemento sobre el plano de la seccion recta; sea ds su proyeccion i dy, dz los proyecciones de ds sobre OY, OZ; se tiene

$$dy=\gamma\ ds$$
$$dz=-\beta\ ds$$

Luego

$$p_{nx}\ ds=-p_{xy}\ dz+p_{xz}\ dy$$

La ecuacion (d) signífica que el segundo miembro de la última ecuacion es la diferencial de una funcion de y, z.

Sea

$$\varphi\ (y,\ z)=C^{te}$$

esta funcion, se tendra

$$p_{nx}\ ds=d\ \varphi$$

Se deduce que la presion p_{nx}, sobre un elemento paralelo a OX, es nula cuando la traza del elemento, en el plano de la seccion recta, es tanjente a una de las curvas representados por la ecuacion $\varphi\ (y\ z)=C$.

EQUILIBRIO SUPERFICIAL

En algunos casos las ecuaciones (c) estan satisfechas, cuando las presiones p_{xy}, p_{xz} son nulas. En estos casos la ecuacion de continuidad (d) es identicamente satisfecha i la presion p_n, sobre un elemento cualquiera, paralelo a OX, es nula, ella es tambien nula sobre la superficie lateral, luego esta superficie está en equilibrio.

Cuando las presiones p_{xy}, p_{xz} no son nulas, la presion p_n, sobre un elemento paralelo a OX, puede ser nula si la traza del elemento, en el plano de la seccion recta, es tanjente a una de las curvas $\varphi\ (x, y)=C$. En particular, si la seccion recta del cilindro coincide con una de estas curvas, se puede admitir que la presion, sobre la superficie lateral, es nula i las condiciones del equilibrio superficial estan satisfechas.

Pero, si la forma de la seccion recta es distinta, la presion lateral no es igual a cero i es preciso equilibrarla con la tension de una capa elástica superficial.

La tension de esta capa debe satisfacer entónces a las ecuaciones (b). En estas ecuaciones las letras x, y se refieren a las direcciones principales de la superficie lateral, en el punto que se considera.

Las direcciones principales del cilindro coinciden con las jeneratrices i la tanjente a la seccíon recta; la primera se designara con la misma letra x i la otra con la letra s, en lugar de y.

El radio de curvatura R_x es infinito i los componentes de p_n se reducen a p_{nx}, luego la tension T_{yy} o T_{ss} es igual a cero i las otras dos componentes verifican las ecuaciones

$$\frac{d\,T_{xx}}{dx}+\frac{d\,T_{xs}}{ds}+p_{nx}=0$$

$$\frac{d\,T_{xs}}{dx}=0$$

La última ecuacion muestra quê T_{xs} es independiente de x. En la primera se admite simplemente que T_{xx} es nulo, entónces la componente T_{xs} debe satisfacer a la ecuacion

$$\frac{d\,T_{xs}}{ds}+p_{nx}=0$$

Se deduce, al reemplazar p_{nx} por su valor.

$$d\,T_{xs} + d\,\varphi = 0$$

Luego

$$T_{xs} = C - \varphi\,(y, z)$$

C es una constante arbitraria.

En resúmen, la tension de la capa elástica, formada por las moléculas de la superficie lateral, está definida por las ecuaciones

$$(b)\left\{\begin{array}{l} d\,\varphi = p_{xz}\,dy - p_{xy}\,dz \\ T_{xs} = C - \varphi\,(y, z) \end{array}\right.$$

CAPITULO VII

APLICACIONES

I

ESTENSION LONJITUDINAL I CONTRACCION TRASVERSAL

Se supone que el momento del par es igual a cero. En este caso, las ecuaciones (c) quedan satisfechas con una presion p_{xx} constante i con los presiones p_{xy}, p_{xz} nulas. La ecuacion de continuidad (d) está satisfecha idénticamente, así como la condicion del equilibrio lateral.

Sea Ω el área de la seccion recta, la primera ecuacion (c) da

$$p_{xx} = -\frac{F}{\Omega}$$

Se pone entónces

$$\frac{F}{E\,\Omega}=k$$

i las ecuaciones (e) se reducen a las siguientes

$$\frac{du}{dx}=k \qquad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=0$$

$$\frac{dv}{dy}=-m\,k \qquad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}=0$$

$$\frac{dw}{dz}=-m\,k \qquad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=0$$

La solucion particular es evidente i se obtiene

$$u=+k\,x$$
$$v=-m\,k\,y$$
$$w=-m\,k\,z$$

Ella corresponde a una estension del cilindro, en la direccion de las jeneratrices, i a una contraccion trasversal.

La observacion confirma este resultado i la razon m entre la contraccion i la estension, tiene aproximadamente un valor igual a $\frac{1}{4}$, lo que significaria, segun la definicion de m, que los coeficientes λ, μ son iguales.

La razon entre la estension del cilindro i su lonjitud es

$$\frac{u}{x}=k=\frac{F}{E\,\Omega}$$

La observacion confirma tambien este resultado i permite medir el valor de la constante E para las diversas clases de materiales; esta constante se llama *coeficiente de elasticidad.* Su valor representa la tension capaz de estender el cilindro de una cantidad igual a su lonjitud.

DEFORMACION CONTINUA

Si la accion de la fuerza F se ejercita progresivamente i puede llegar a tomar un valor tan grande como se quiera, los valores obtenidos para u, v, w representan las variaciones infinitamente pequeñas de las coordenadas debidas a una variacion infinitamente pequeña de la fuerza. Se puede entónces reemplazar u, v, w por dx, dy, dz i k por dk; se obtiene así

$$dx = x\,dk$$
$$dy = -m\,y\,dk$$
$$dz = -m\,z\,dk$$

Sean x_0 y_0 z_0 los valores iniciales de x, y, z se tendra

$$x = x_0\,e^{+k}$$
$$y = y_0\,e^{-m\,k}$$
$$z = z_0\,e^{-m\,k}$$

Tales son, por consiguiente, las deformaciones debidas al efecto de la fuerza F, de magnitud cualquiera.

II

TORSION

Se supone que las fuerzas que obran sobre las bases del cilindro son equivalentes a un par cuyo eje coincide con el eje del cilindro. Se tiene entónces, en las ecuaciones (c),

$$F = M_y = M_z = 0$$
$$M_x = M$$

Estas ecuaciones quedan satisfechas si se adopta

$$p_{xx} = 0$$
$$p_{xy} = Az$$
$$p_{xz} = Ay$$

La ecuacion (d) está así satisfecha idénticamente.

Sea I_0 el momento de inercia de la seccion recta respecto del eje del cilindro, la cuarta ecuacion (c) da

$$A\, I_0 = M$$

Se pone entónces

$$\frac{M}{\mu\, I_0} = k$$

i se tiene

$$p_{xy} = k\, \mu\, z$$
$$p_{xz} = -k\, \mu\, y$$

Las ecuaciones (e) dan, en seguida,

$$\frac{du}{dx} = 0 \qquad \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = 0$$
$$\frac{dv}{dy} = 0 \qquad \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = ky$$
$$\frac{dw}{dz} = 0 \qquad \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = -kz$$

Una solucion particular de esta sistema es

$$u = 0$$
$$v = -k\,x\,z$$
$$w = +k\,x\,y$$

Se deduce que los puntos de una seccion recta, de abcisa x, jiran al rededor de OX de un ángulo

$$\theta = k\,x$$

Esta deformacion se llama *torsion* i la razon entre el ángulo de torsion i la lonjitud del cilindro es

$$\frac{\theta}{x} = k = \frac{M}{\mu\, I_0}$$

Como $u=0$ el cilindro no tiene ninguna estension lonjitudinal.

EQUILIBRIO SUPERFICIAL

Se designara simplemente con la letra T la tension en los puntos del perímetro de una seccion recta; T es tanjente a este perimetro.

Los ecuaciones (b) dan, en el caso actual,

$$d\,\varphi = -k\,\mu\,(y\,dy + z\,dz)$$
$$T = C - k\,\mu\,\frac{y^2 + z^2}{2}$$

Se ve que la tension queda constante si la seccion recta es una circunferencia; se puede entónces elejir la constante arbitraria C de tal modo que la tension sea nula.

Por consiguiente, en el caso del cilindro de revolucion, la torsion no da lugar a ninguna tension superficial i la superficie lateral queda en equilibrio sin que sea necesario considerar una capa elástica.

En los demas casos se puede determinar el valor de la constante de tal modo que el sistema de las tensiones $T\ ds$, en los puntos de una seccion recta, sea equivalente a cero. Esta última condicion es necesaria porque, si ella no estuviera satisfecha, habria que hacer figurar las tensiones de la capa elástica en las ecuaciones (c).

Se buscará primero la suma de las proyecciones de las tensiones sobre el eje OY. La proyeccion de $T\ ds$ es $T\ dy$ i se tiene

$$\int T\ dy = C \int dy - \frac{k\mu}{2} \int y^2\ dy - \frac{k\mu}{2} \int z^2\ dy$$

Las dos primeras integrales del segundo miembro son idénticamente nulas porque el perímetro de la seccion es una curva cerrada. La última integral es tambien nula; en efecto, como el oríjen en el centro de gravedad de la seccion recta correspondiente, se tiene

$$\int\int z\, dy\ dz = 0$$

Ahora, una paralela al eje OY corta el perímetro en un número par de puntos; sean $z_1\ z_2 \ldots$ sus ordenados se tiene

$$\int\int z\ dy\ dz = \tfrac{1}{2} \int dy\ (-z_1^2 + z_2^2\ \ldots)$$

Por otra parte, cuando se recorre el perímetro en un sentido determinado, se tiene

$$dy = -dy_1 = +dy_2 = \ldots$$

Luego se puede escribir

$$\int\int z\, dy\, dz = \tfrac{1}{2} \int z^2\, dy$$

La primera integral se refiere a los elementos del area i la segunda a los del perímetro; como la primera es nula, la segunda es nula tambien i se deduce

$$\int T\, dy = 0$$

Se demostraria de la misma manera que

$$\int T\, dz = 0$$

Luego, cualquiera que sea el valor de la constante arbitraria C, la resultante jeométrica de las tensiones, en los puntos del perímetro de una seccion, es nula.

Sea r la distancia de una de estos puntos al eje OX i $d\theta$ el ángulo del sector que corresponde al arco ds, se tiene

$$M_x\,(T\, ds) = T\, r^2\, d\theta$$

Por consiguiente

$$\int M_x\,(T\, ds) = C \int r^2\, d\theta - \frac{k\,\mu}{2} \int r^4\, d\theta$$

Se tiene ahora

$$\int r^2\, d\theta = 2\,\Omega$$
$$\int r^4\, d\theta = 4\, I_0$$

Luego

$$\int M_x\,(T\, ds) = 2\, C\,\Omega - 2\, k\,\mu\, I_0$$

Para que esta suma de momentos sea igual a cero, basta adoptar

$$C = \frac{k\,\mu\, I_0}{\Omega}$$

Se tiene, por consiguiente,

$$T = k\,\mu\left(\frac{I_0}{\Omega} - \frac{r^2}{2}\right)$$

O bien, si se reemplaza k por su valor,

$$T = \frac{M}{I_0}\left(\frac{I_0}{\Omega} - \frac{r^2}{2}\right)$$

Sea todavía r_0 el radio de jiracion del área de la seccion; se puede escribir también

$$T = \frac{M}{I_0}\,\frac{r_0^2 - r^2}{2}$$

En el caso del círculo, el parentesis es igual a cero, luego la tensíon T es nula sobre el cilindro de revolucion.

En los demas casos la tension es nula en los puntos de interseccion del perímetro de la seccion recta con una circunferencia de radio r_0; ella cambia de sentido a un lado i otro de estos puntos de interseccion.

Por ejemplo, en una elipse de ejes $2a$, $2b$ se tiene

$$r_0^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$$

Los puntos de interseccion se encuentran sobre los diámetros conjugados iguales.

En el caso de un ciliudro de base rectangular i de dimensiones $2a$, $2b$, se tiene

$$r_0^2 = \tfrac{2}{3}\,(a^2+b^2)$$

La circunferencia de radio r_0 corta siempre los dos lados mayores del rectángulo i, cuando $a^2 < 2b^2$, ella corta tambien los otros dos lados; entónces la tension de la capa superficial cambia dos veces de sentido sobre cada lado. Es el caso de una base cuadrangular.

TORSION CONTINUA

Si el eje del par de torsion obra progresivamente, se aplícan los ecuaciones obtenidas a cada variacion elemental del par i se obtiene así

$$\begin{aligned} dx &= 0 \\ dy &= -x\,z\,d\,k \\ dz &= +x\,y\,d\,k \end{aligned}$$

(*Continuará*).